Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 5 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varepsilon > 0$ und

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x,\Omega) < \varepsilon\}.$$

Bezeichne $\chi_{2\varepsilon}$ die charakteristische Funktion der Menge $\Omega_{2\varepsilon}$. Sei $\psi_\varepsilon := \chi_{2\varepsilon} * \varphi_\varepsilon$, wobei $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ und

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right)}{\int_{B_1(0)} \exp\left(\frac{1}{\|y\|^2-1}\right) dy} & , \|x\| < 1 \\ 0 & , \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

so definiert ist wie unter (3.1.6) aus der Vorlesung. Zeigen Sie

i) $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$

ii) $\psi_\varepsilon = 1$ auf Ω_ε

iii) $\operatorname{supp} \psi_\varepsilon \subset \Omega_{3\varepsilon}$

Skizzieren die den Graph von ψ_ε für $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset \Omega$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ existiert, mit $\psi = 1$ auf K.

Lösung:
zu a)i): Laut Vorlesung ist $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{2\varepsilon}(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \varphi_\varepsilon(x-y)dy$$

Der Integrand hat kompakten Träger und ist unendlich oft stetig nach x differenzierbar. Somit kann Integral und Ableitung vertauscht werden und die $\psi_\varepsilon \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt. Außerdem folgt

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\chi_{2\varepsilon}(y)\varphi_\varepsilon(x-y)}_{\geq 0} dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)dy \overset{\text{VL}}{=} 1.$$

Zu a)ii): Ist $x \in \Omega_\varepsilon$ und $x - y \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$d(y,\Omega) \leq d(x,\Omega) + \|y-x\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

und somit $y \in \Omega_{2\varepsilon}$. $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$ und $\chi_{2\varepsilon}(y) = 1$ für alle $y \in \Omega_{2\varepsilon}$ impliziert

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{2\varepsilon}(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)dy \overset{\text{VL}}{=} 1.$$

zu a)iii): $x - y \in \overline{B_\varepsilon(0)} = \operatorname{supp} \varphi_\varepsilon$ und $y \in \Omega_{2\varepsilon} = \operatorname{supp} \chi_{2\varepsilon}$ impliziert

$$d(x,\Omega) \leq d(y,\Omega) + \|x-y\| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \quad \Rightarrow \quad x \in \Omega_{3\varepsilon}.$$

Da diese beiden Bedingungen erfüllt sein müssen , damit der Integrand von ψ_ε nicht verschwindet, folgt somit die Behauptung.
Zu b): Hier genügt es zu zeigen, dass

$$K \subset K_\eta := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; d(x,K) < \eta\} \subset \Omega \qquad \text{für ein } \eta > 0.$$

Denn dann ist $\psi_{\frac{\eta}{4}}$ für $K_{\frac{\eta}{4}}$ (ist offen) so wie bei a) definiert die Lösung. Nehmen wir an, dass es kein solches $\eta > 0$ gibt. Dann gäbe es zwei Folgen $(x_i) \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ und $(k_i) \in K$ mit $\|x_i - k_i\| \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da K kompakt ist, gäbe es eine Teilfolge $k_{i_l} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} k$ mit $k \in K$.

$$\|x_{i_l} - k_0\| \leq \|x_{i_l} - k_{i_l}\| + \|k_{i_l} - k_0\| \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dann müsste $k_0 \in \partial\Omega$ sein, denn $(x_{i_l}) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ und $(k_{i_l}) \subset K \subset \Omega$ was aber nicht sein kann, da Ω offen ist. Widerspruch.

Aufgabe 2 **4 Punkte**
Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $M > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp} \varphi \subset [-M, M]$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} \left[\varphi(x) - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \varphi^{(j)}(0) \right] & , x \neq 0, \\ \dfrac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(0) & , x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass ψ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist und das es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\sup_{-m \leq x \leq M} |\psi(x)| \leq C \sup_{-m \leq x \leq M} |\phi^{(n+1)}(x)|.$$

Tipp: Taylorformel mit Integralrestglied

Lösung:
Wird die Taylorformel mit Restglied auf die C^∞-Funktion φ angewendet, so erhält man

$$\varphi(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \varphi^{(j)}(0) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(tx)dt$$

Damit folgt für $x \neq 0$,

(1) $$\psi(x) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(tx)dt.$$

Andererseits gilt, weil $\varphi^{(n+1)}$ kompakten Träger hat und wegen der dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\psi(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \lim_{x\to 0}\varphi^{(n+1)}(tx)dt = \frac{1}{n!}\varphi^{(n+1)}(0)\int_0^1 (1-t)^n dt\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(0).\end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit auf gan $\mathbb{R}$ bewiesen, denn für $x \neq 0$ ist ψ stetig, da sie eine Verkettung von stetigen Funktionen ist. Formel (1) impliziert für $x \neq 0$:

$$|\psi(x)| \leq \frac{1}{n!}\sup_{\substack{-M\leq z\leq M\\ z\neq 0}}|\varphi^{(n+1)}(z)|\left|\int_0^1 (1-t)^n dt\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}\sup_{-M\leq z\leq M}|\varphi^{(n+1)}(z)|$$

Für $x = 0$ ist diese Ungleichung trivialerweise erfüllt und man erhält somit die Behauptung.

$$\sup_{-M\leq x\leq M}|\psi(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\sup_{-M\leq x\leq M}|\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definieren wir

$$\varphi_t(x) = \frac{\varphi(x+th)-\varphi(x)}{t}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\varphi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ für $t \neq 0$.

b) Beweisen Sie: Für $t \to 0$ konvergiert φ_t in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen eine Funktion. Berechnen Sie diese Funktion.
Tipp: Taylorformel mit Integralrestglied zur zweiten Ordnung für $\partial^\alpha\varphi$

Lösung:

Zu a): φ hat kompakten Träger und somit ist $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B_M(0)}$ für ein M groß genug. Ist $x + |th| \in \overline{B_M(0)}$ dann ist $x \in \overline{B_{M+|th|}(0)}$ und somit ist $\operatorname{supp}(x \mapsto \varphi(x+th)) \subset \overline{B_{M+|th|}(0)}$. Damit ist auch $\operatorname{supp}\varphi_t \subset \overline{B_{M+|th|}(0)}$. Damit folgt aber auch, dass $\varphi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, denn die Differenzierbarkeitseigenschaften erbt φ_t von φ wegen der Summenregel.

Zu b): Zuerst müssen wir zeigen, dass für kleine t, alle $\operatorname{supp}\varphi_t$ in ein und demselben Kompaktum enthalten sind. Mit der Argumentation aus a) folgt aber sofort, dass $\operatorname{supp}\varphi_t \subset \overline{B_{M+|h|}(0)}$ für alle $|t| \leq 1$.

Sei α ein Multiindex:

$$\partial^\alpha \varphi_t(x) = \frac{1}{t}\left[\partial^\alpha\varphi(x+th) - \partial^\alpha\varphi(x)\right]$$
$$\overset{\text{Taylor}}{=} \frac{1}{t}\left[t\sum_{i=1}^n h_i\partial_{x_i}(\partial^\alpha\varphi)(x) + t^2\sum_{i,j=1}^n\int_0^1(1-u)h_ih_j\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\partial^\alpha\varphi)(x+uth)du\right]$$

Das impliziert:

$$\left|\partial^\alpha\varphi_t(x) - \sum_{i=1}^n h_i\partial_{x_i}(\partial^\alpha\varphi)(x)\right| \le \left|t\sum_{i,j=1}^n\int_0^1(1-u)h_ih_j\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\partial^\alpha\varphi)(x+uth)du\right|$$
$$\le C|t||h|^2\sum_{|\beta|\le|\alpha|+2}\sup_{y\in K}\left|\partial^\beta\varphi(y)\right|$$

Damit ist gezeigt, dass $\partial^\alpha\varphi_t$ auf K gleichmäßig gegen die Funktion $x\mapsto\sum_{i=1}^n h_i\partial_{x_i}(\partial^\alpha\varphi)(x)$ konvergiert. Das beweist, das φ_t in $\mathcal{D}(\Omega)$ für $t\to 0$ gegen die Funktion

$$x\mapsto\sum_{i=1}^n h_i(\partial_{x_i}\varphi)(x) = \langle h, \operatorname{grad}\varphi\rangle \quad \text{konvergiert.}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

a) Sei $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie, dass für $i=1,2,\dots,n$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^2dx = -2\operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^n}x_i\varphi(x)\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}(x)dx\right).$$

Tipp: Satz von Fubini und partielle Integration bzgl. x_i

b) Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit a), dass ein $C>0$ existiert, so dass

$$\int_\Omega|\varphi(x)|^2dx \le C\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\right|^2dx \quad \text{für alle } \varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Tipp: Cauchy-Schwarz Ungleichung für Integrale

Lösung:
Zu a): Da die Funktion φ kompakten Träger hat, können wir den Satz von Fubini anwenden

$$\int_{\mathbb{R}^n}x_i\varphi(x)(\partial_{x_i}\overline{\varphi})(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}x_i\varphi(x)(\partial_{x_i}\overline{\varphi})(x)dx_i\right]dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_n$$

Wir wenden partielle Integration auf das mittlere Integral an:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x_i\varphi(x)(\partial_{x_i}\overline{\varphi})(x)dx_i &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_i}(x_i\varphi(x))\overline{\varphi}(x)dx_i \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi}(x)dx_i - \int_{\mathbb{R}} x_i(\partial_{x_i}\varphi)(x)\overline{\varphi}(x)dx_i \\ &= -\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2dx_i - \overline{\int_{\mathbb{R}} x_i\varphi(x)(\partial_{x_i}\overline{\varphi})(x)dx_i}\end{aligned}$$

Umstellen der Terme ergibt

$$-2\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} x_i\varphi(x)(\partial_{x_i}\overline{\varphi})(x)dx_i = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2dx_i$$

und Integration nach den restlichen Variablen ergibt die Behauptung.

Zu b): Wir wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf das Ergebnis aus a) an

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 \leq 2\left|\int_{\Omega} x_i\varphi(x)\partial_{x_i}(x)dx\right| \leq 2\left(\int_{\Omega} |x_i\varphi(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |(\partial_{x_i}\varphi)(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Da Ω beschränkt ist können wir ein $C_1 > 0$ so finden, dass $\sup_{x\in\Omega}|x_i| \leq C_1$.

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 \leq 2C_1\left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |(\partial_{x_i}\varphi)(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Für $\int_{\Omega}|\varphi(x)|^2dx = 0$ ist die Ungleichung trivial und ansonsten gibt das Teilen beider Seiten durch $\left(\int_{\Omega}|\varphi(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$ das Ergebnis.