Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 6 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionale $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ Distributionen sind und bestimmen Sie ihre Ordnung:

a) $\langle u, \varphi \rangle = \int\limits_0^1 \varphi(x)dx$

b) $\langle u, \varphi \rangle = \varphi(0) + \varphi'(1)$

c) $\langle u, \varphi \rangle = \int\limits_0^\infty x^2\varphi'(x)dx$

d) $\langle u, \varphi \rangle = \sum\limits_{j=0}^\infty \varphi^{(j)}(j)$

Welche sind Distributionen vom Funktionen-Typ?

Lösung:
Wir benutzen Satz 3.1.4 aus der Vorlesung.

Zu a): $\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x)\varphi(x)dx$. Die charakteristischen Funktion ist per definition in $L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Also ist u eine Distribution vom Funktionen-Typ und somit von Ordnung 0.

Zu b):

$$\langle u, \varphi \rangle \leq |\varphi(0)| + |\varphi'(0)| \leq 2 \sup_{x \in K} \left\{ |\varphi(x)|, |\varphi'(x)| \right\}$$

Somit ist $C = 2$ und $k = 1$. Also ist u eine Distribution von Ordnung 1. Sie ist nicht vom Funktionen-Typ.

Zu c):

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle = \int_0^\infty x^2\varphi'(x)dx &\overset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{x^2\varphi(x)|_0^\infty}_{\overset{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})}{=} 0 - 0^2\varphi(0) = 0} - \int_0^\infty 2x\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (-2x\chi_{[0,\infty)}(x))\varphi(x)dx\end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = -2x\chi_{[0,\infty)}(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und somit ist u eine Distribution vom Funktionen-Typ und Ordnung 0.

Zu d): Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann existiert ein $N_K \in \mathbb{N}$ mit $K \subset (-\infty, N_K]$. Sei nun ein $\varphi \in C_0^\infty(K)$, dann gilt

$$|\langle u, \varphi\rangle| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j)\right| \le \sum_{j=0}^{N_K} \left|\varphi^{(j)}(j)\right| \le N_K \sup_{x\in K} \left\{ \left|\varphi^{(j)}(x)\right| \;\middle|\; x \in K, j = 0, \dots, N_k \right\}$$

Damit ist $C(K) = k(K) = N_K$ und u eine Distribution. Da das k nicht unabhängig von K gewählt werden kann, hat u keine Ordnung. Sie ist nicht vom Funktionen-Typ.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > -1$ die Funktionen

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda, & x < 0, \\ 0, & x \ge 0, \end{cases}$$

in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ sind.

b) Zeigen Sie, dass für $\operatorname{Re}\lambda > -1$ und für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$(1) \qquad \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx\,.$$

Sei $\operatorname{Re}\lambda > -2$. Existiert die linke Seite für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$? Zeigen Sie, dass die rechte Seite für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ existiert und eine Distribution definiert. Diese Distribution wird auch mit x_+^λ bezeichnet. Benutzen Sie dieselben Methoden um auch x_-^λ für $\operatorname{Re}\lambda > -2$ zu definieren.

c) Zeigen Sie, dass durch mehrfaches Anwenden dieser Prozedur die Distributionen $x_\pm^\lambda$ sogar für $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$ und $\lambda \ne -1, \dots, -n$ definiert werden können.

Lösung:
Zu a): Die Funktionen sind Produkte aus messbaren Funktionen $\chi_{[0,\infty)}$ und $\chi_{(-\infty,0]}$ und der stetigen Funktionen x^λ und somit auch messbar. Sei $R \in \mathbb{R}^+$ gegeben:

$$\int_{-R}^{R} \left|x_+^\lambda\right| dx = \int_0^R \left|x^\lambda\right| dx = \int_0^R \left|x^{\operatorname{Re}\lambda} e^{i \operatorname{Im}\lambda x}\right| dx = \int_0^R x^{\operatorname{Re}\lambda} dx \overset{\operatorname{Re}\lambda+1>0}{=} \frac{R^{\operatorname{Re}\lambda+1}}{\operatorname{Re}\lambda + 1} < \infty$$

$$\int_{-R}^{R} \left|x_-^\lambda\right| dx = \int_{-R}^0 \left||x|^\lambda\right| dx = \int_{-R}^0 \left||x|^{\operatorname{Re}\lambda} e^{i \operatorname{Im}\lambda x}\right| dx = \int_{-R}^0 (-x)^{\operatorname{Re}\lambda} dx = \int_0^R x^{\operatorname{Re}\lambda} dx$$

$$\overset{\operatorname{Re}\lambda+1>0}{=} \frac{R^{\operatorname{Re}\lambda+1}}{\operatorname{Re}\lambda + 1} < \infty$$

Damit folgt x_+^λ und $x_-^\lambda \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Insbesondere definieren sie Distributionen vom Funktionen-Typ.

Zu b): Die Gleichung folgt aus

$$\int_0^\infty x^\lambda dx \overset{\operatorname{Re}\lambda \geq -1}{=} \frac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda+1}$$

Die linke Seite von Formel (1) ist gleich $\langle u_{x_+^\lambda}, \varphi\rangle$ und ist für $\lambda \in (-2,-1]$ zum Beispiel nicht für Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi(0) \neq 0$ definiert, denn dann gibt es eine Umgebung der 0, wo $x^\lambda \varphi(x) \geq \frac{|\varphi(0)|}{2} x^\lambda$. Es gilt

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\psi(x) \quad \text{mit} \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & x \neq 0, \\ \varphi'(0), & x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion ψ ist stetig und somit integrierbar. Damit wandelt sich der erste Term auf der rechten Seite zu

$$\int_0^1 x^{\lambda+1}\psi(x)dx$$

der für alle $\operatorname{Re}\lambda > -2$ wohldefiniert ist. Der zweite Term auf der rechten Seite ist definiert für $\lambda \neq -1$ und dritte Term auf der rechten Seite ist für alle λ definiert. Damit ist die rechte Seite für alle $\operatorname{Re}\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$ definiert und erweitert die ursprüngliche Definition.

Für x_-^λ gelten wegen

$$\begin{aligned} \langle u_{x_-^\lambda}, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^0 (-x)^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)dx \\ &= \int_0^1 x^{\lambda+1}\psi(-x)dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(-x)dx\,. \end{aligned}$$

genau dieselben Aussagen.

Zu c): Da $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$, gibt es laut der Taylorformel ein ξ zwischen 0 und x, so dass

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{(k+1)!} x^n.$$

Das impliziert mit dem Intervallschachtelungsprinzip, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] = \varphi^{(n)}(0).$$

Damit gibt es für $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, \ldots, -n$ eine Fortsetzung der Form

$$\begin{aligned} \langle u_{x_\pm^\lambda}, \varphi\rangle &= \int_0^1 x^{\lambda+n}\psi_n(\pm x)dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{(\lambda+k+1)k!} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(\pm x)dx \\ \psi_n(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x^n}\left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right], & x \neq 0, \\ \varphi^{(n)}(0), & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ und $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

b) Sei $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$, $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass

$$f_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ f.ü.} \qquad \text{und} \qquad f_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

c) Sei $\varepsilon > 0$ und $f_\varepsilon^\pm(x) = \dfrac{1}{x \pm i\varepsilon}$. Zeigen Sie, dass

$$f_\varepsilon^\pm \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \operatorname{pv}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(Der Grenzwert wird mit $\frac{1}{x\pm i0}$ bezeichnet.)

Lösung:

Zu a): φ hat kompakten Träger. Somit gibt es ein $R > 0$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R(0)$ und $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset B_{\varepsilon R}(0)$. Dann folgt für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\big|\langle u_{\varphi_\varepsilon}, \psi\rangle - \langle \delta, \psi\rangle\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)\psi(x)dx - \psi(0)\right| \overset{\int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(x)dx=1}{=} \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)(\psi(x)-\psi(0))dx\right| \\
&\overset{\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subseteq B_{\varepsilon R}(0)}{=} \left|\int_{B_{\varepsilon R}(0)} \varphi_\varepsilon(x)(\psi(x)-\psi(0))dx\right| \\
&\leq \sup_{x\in B_{\varepsilon R}(0)} |\psi(x)-\psi(0)| \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon(x)|dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

da ψ stetig ist.

Zu b): Hier kann nicht einfach a) angewendet werden, denn $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ hat keinen kompakten Träger.

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(y)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

$$\begin{aligned}
\big|\langle u_{f_\varepsilon}, \psi\rangle - \langle \delta, \psi\rangle\big| &\overset{\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dx=1}{=} \left|\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)(\psi(x)-\psi(0))dx\right| \\
&\leq \int_{|x|\geq R} f_\varepsilon(x)\,|\psi(x)-\psi(0)|\,dx + \int_{|x|<R} f_\varepsilon(x)\,|\psi(x)-\psi(0)|\,dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)-\psi(0)|\,\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right] + \sup_{x\in B_R(0)} |\psi(x)-\psi(0)| \underbrace{\int_{|x|<R} f_\varepsilon(x)dx}_{\leq 1}
\end{aligned}$$

Sei nun ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig aber fest gegeben, dann wählen wir ein R so groß, dass der zweite Term kleiner als $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ ist. Das geht, da ψ stetig ist. Dann wählen wir ε so klein (abhängig von R), dass der erste Term auch kleiner als $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ ist.
Zu c): Wir zerlegen das Integral in Real- und Imaginärteil

$$\langle u_{f_\varepsilon^\pm}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} dx \mp i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx$$

Nach b) konvergiert der zweite Term gegen $\mp i\pi\delta$ für $\varepsilon \to 0$. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \text{pv}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Beide Seiten sind als Grenzwerte von Folgen definiert. Wir betrachten die Differenz zwei solcher Folgeglieder

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx - \int_{|x|>\eta} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \le \left| \int_{|x|\le\eta} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx \right| + \int_{|x|>\eta} \left| \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2} - 1 \right| \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|x|\le\eta} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx \right| &\overset{\int_{-\eta}^{\eta} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}dx = 0}{=} \left| \int_{|x|\le\eta} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}(\varphi(x)-\varphi(0))dx \right| \\
&\le \sup_{x\in R} |\varphi'(x)| \int_{|x|\le\eta} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}}_{\le 1} dx \le 2\eta \sup_{x\in R} |\varphi'(x)|
\end{aligned}$$

$$\int_{|x|>\eta} \frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx \le \frac{\sup_{x\in R} |\varphi(x)|}{|\eta|} \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx = \frac{\varepsilon}{|\eta|} \sup_{x\in R} |\varphi(x)|$$

Sei nun ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig aber fest gegeben, dann wählen wir ein η so groß, dass der erste Term kleiner als $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ ist. Dann wählen wir ε so klein (abhängig von η), dass der zweite Term auch kleiner als $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ ist. Die Behauptung folgt dann aus der Ungleichung

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| \le \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx - \int_{|x|>\eta} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| + \left| \int_{|x|>\eta} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \right|,$$

da die Konvergenz des zweiten Terms für $\eta \to 0$ schon in der Vorlesung gezeigt wurde.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Wiederholung: Lösen Sie die beiden folgende Cauchy-Problem explizit:

a) $$\begin{cases} x\partial_x u + y\partial_y u - \partial_x u \partial_y u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = y & \forall y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \partial_x u \partial_y u - 5x\partial_x u - 5y\partial_y u + 9xy = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = 2y^2 & \forall y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lösung:
Wir benutzen wieder den Lösungsalgorithmus aus Übung 2. *Zu a):* Es gilt

$$F(p_x, p_y, z, x, y) = yp_x + yp_y - p_x p_y$$

und somit

$$\begin{cases} p' = -\partial_z F - \operatorname{grad}_{(x,y)} F = -\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \\ z' = \langle \operatorname{grad}_p F, p\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x - p_y \\ y - p_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \right\rangle = (x - p_y)p_x + (y - p_x)p_y \\ \quad = xp_x + yp_y - 2p_x p_y = -p_x p_y \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \operatorname{grad}_p F = \begin{pmatrix} x - p_y \\ y - p_x \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die dazugehörigen Anfangsbedingungen sind

$$x(0) = 0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = u(x(0), y(0)) = u(0, y_0) = y_0,\ p_y(0) = \partial_y u(0, y) = 1$$

$$0 = x(0)p_x(0) + y(0)p_y(0) - p_x(0)p_y(0) = y_0 - p_x(0) \ \Rightarrow\ p_x(0) = y_0$$

Die Anfangswertaufgaben werden nun Schrittweise gelöst.

$$\begin{aligned} &p_x(t) = y_0 e^{-t}, \quad p_y(t) = e^{-t} \\ &z'(t) = -y_0 e^{-2t}, \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{y_0}{2}(e^{-2t} + 1) \\ &x'(t) = x(t) - e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} = -\sinh t \\ &y'(t) = y(t) - y_0 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{y_0}{2}e^{-t} + \frac{y_0}{2}e^{t} = y_0 \cosh t \end{aligned}$$

Sei (x, y) gegeben.

$$\begin{aligned} &(x, y) = (-\sinh t, y_0 \cosh t) \\ &y = y_0 \cosh t = y_0\sqrt{1 + \sinh^2 t} = y_0\sqrt{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &2x + 2\frac{y}{y_0} = e^{-t} - e^{t} + e^{-t} + e^{t} = 2e^{-t} \quad \Rightarrow \quad e^{-t} = x + \frac{y}{y_0} = y + \sqrt{1 + x^2} \\ \Rightarrow \quad &u(x, y) = z(t) = \frac{y_0}{2}(e^{-2t} + 1) = \frac{y}{2\sqrt{1 + x^2}}\left(\left(y + \sqrt{1 + x^2}\right)^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Zu b): In diesem Fall ist

$$F(p_x, p_y, z, x, y) = p_x p_y - 5xp_x - 5yp_y + 9xy$$

und somit

$$\begin{cases} p' = -\partial_z F - \operatorname{grad}_{(x,y)} F = \begin{pmatrix} 5p_x - 9y \\ 5p_y - 9x \end{pmatrix} \\ z' = \langle \operatorname{grad}_p F, p \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p_y - 5x \\ p_x - 5y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \right\rangle = (p_y - 5x)p_x + (p_x - 5y)p_y \\ \quad = 2p_x p_y - 5xp_x - 5yp_y = p_x p_y - 9xy \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \operatorname{grad}_p F = \begin{pmatrix} p_y - 5x \\ p_x - 5y \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = u(0, y_0) = 2y_0^2$$

$$p_y(0) = \partial_y u(0, y_0) = 4y_0, \quad 0 = p_x(0)p_y(0) - 5y_0 p_y(0) \quad \Rightarrow \quad p_x(0) = 5y_0.$$

Wir lösen die Anfangswertaufgaben schrittweise:

$$\begin{cases} p_x' = 5p_x - 9y \\ y' = p_x - 5y \end{cases} \overset{p_x = y' + 5y}{\Longrightarrow} \quad y'' = 5y' = 5y' + 25y - 9y \quad \Rightarrow \quad y'' = 16y$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = Ae^{4t} + Be^{-4t}$$

$$\Rightarrow \quad p_x = y' + 5y = 9Ae^{4t} + Be^{-4t}$$

$$\overset{y(0)=y_0,\ p_x(0)=5y_0}{\Longrightarrow} \quad y(t) = \frac{y_0}{2}\left(e^{4t} + e^{-4t}\right),\ p_x(t) = \frac{y_0}{2}\left(9e^{4t} + e^{-4t}\right)$$

$$\begin{cases} p_y' = 5p_y - 9x \\ y' = p_y - 5x \end{cases} \overset{x(0)=0,\ p_y(0)4y_0}{\Longrightarrow} \quad x(t) = \frac{y_0}{2}\left(e^{4t} - e^{-4t}\right),\ p_y(t) = \frac{y_0}{2}\left(9e^{4t} - e^{-4t}\right)$$

$$\begin{aligned} z' = p_x p_y - 9xy &= \frac{y_0^2}{4}\left(81e^{8t} - e^{-8t}\right) - 9\frac{y_0^2}{4}\left(e^{8t} - e^{-8t}\right) = \frac{y_0^2}{4}\left(72e^{8t} + 8e^{-8t}\right) \\ &= y_0^2\left(18e^{8t} + 2e^{-8t}\right) \\ \overset{\text{Int.}}{\Rightarrow} \quad z &= \frac{y_0^2}{4}\left(9e^{8t} - e^{-8t}\right), \qquad \text{denn } z(0) = 2y_0^2. \end{aligned}$$

Sei (x, y) gegeben.

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\frac{y_0}{2}\left(e^{4t} - e^{-4t}\right), \frac{y_0}{2}\left(e^{4t} + e^{-4t}\right)\right) \\ x + y &= \frac{y_0}{2} 2e^{4t} = y_0 e^{4t} \\ y - x &= y_0 e^{-4t} \\ \Rightarrow \quad u(x, y) = z(t) &= \frac{9}{4}(y_0 e^{4t})^2 - \frac{1}{4}(y_0 e^{-4t})^2 = \frac{9}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(y - x)^2 \\ &= \frac{9}{4}\left(x^2 + y^2 + 2xy\right) - \frac{1}{4}(y^2 + x^2 - 2xy) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 5xy \end{aligned}$$