Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 7 mit Musterlösungen

Hinweis: Immer, wenn von einer Funktion f als Distribution gesprochen wird, so ist die Distribution vom Funktionentyp u_f gemeint. Diese Konvention ist am Anfang etwas befremdlich, aber üblich in der einschlägigen Literatur.

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Distributionen:

i) $f(x) = |x|$

ii) $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$

iii) $h(x) = pv\left(\frac{1}{x}\right)$

iv) $k_\lambda(x) = x_+^\lambda, \quad \lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$

b) Sei $n \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda < n-2$. Zeigen Sie dass

$$\Delta\|x\|^{-\lambda} = \lambda(\lambda - n + 2)\|x\|^{-\lambda-2} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Lösung:
Zu a): Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ beliebig.
Zu i):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)dx &= \int_0^\infty x\varphi'(x)dx + \int_{-\infty}^0 (-x)\varphi'(x)dx \\ &= x\varphi(x)\big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x)dx - x\varphi(x)\big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx \\ &\overset{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})}{=} -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)dx \quad \Rightarrow \quad u'_{|\cdot|} = u_{\operatorname{sgn}}\end{aligned}$$

Zu ii):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^\infty \varphi'(x)dx - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)dx \overset{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})}{=} -\varphi(0) + (-\varphi(0)) \\ &= -2\varphi(0) = -2\delta(\varphi) \quad \Rightarrow \quad u'_{\operatorname{sgn}} = 2\delta\end{aligned}$$

Zu iii):

$$\begin{aligned}
\left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), \varphi'\right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left.\frac{\varphi(x)}{x}\right|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx + \left.\frac{\varphi(x)}{x}\right|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{|x|\geq\varepsilon}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\varphi(x)dx + \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\varphi(x)dx - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \\
&=: -\left\langle pv\left(-\frac{1}{x^2}\right), \varphi'\right\rangle \quad \Rightarrow \quad pv\left(\frac{1}{x}\right)' = pv\left(-\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Zu iv):

$$\langle x_+^\lambda, \varphi'\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty} x^\lambda\varphi'(x)dx + \sum_{\substack{0\leq k<N \\ k\neq -\lambda-1}}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}\frac{\varepsilon^{k+\lambda+1}}{k+\lambda+1} + \sum_{\substack{0\leq k<N \\ k=-\lambda-1}}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}\log\varepsilon\right]$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^\lambda\varphi'(x)dx = x^\lambda\varphi(x)|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)dx \overset{\varphi\in C_0^\infty}{=} -\varepsilon^\lambda\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)dx$$

$$\varphi(\varepsilon) \overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{0\leq k<N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\varepsilon^k + \frac{\varphi^{(N)}(\xi)}{N!}\varepsilon^N \quad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\langle x_+^\lambda, \varphi'\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[&-\lambda\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\lambda-1}\varphi(x)dx - \sum_{0\leq k<N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\varepsilon^{k+\lambda} + \frac{\varphi^{(N)}(\xi)}{N!}\varepsilon^{N+\lambda} \\
&+ \sum_{\substack{1\leq k<N+1 \\ k\neq -\lambda}}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k-1)!}\frac{\varepsilon^{k+\lambda}}{k+\lambda} + \sum_{\substack{0\leq k<N \\ k=-\lambda-1}}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(-\lambda-1)!}\log\varepsilon\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{N+\lambda>-1}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[-\lambda\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\lambda-1}\varphi(x)dx - \lambda\varphi(0)\frac{\varepsilon^\lambda}{\lambda} \\
&+ \sum_{\substack{1\leq k<N \\ k\neq -\lambda}}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k-1)!}\left[-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+\lambda}\right]\varepsilon^{k+\lambda} - \lambda\sum_{\substack{0\leq k<N \\ k=-\lambda-1}}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(-\lambda)!}\log\varepsilon\Bigg] \\
&= -\lambda\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\lambda-1}\varphi(x)dx + \sum_{\substack{0\leq k<N \\ k\neq -\lambda}}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\frac{\varepsilon^{k+\lambda}}{k+\lambda}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{0\le k<N \\ k=-(\lambda-1)-1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \log\varepsilon \Bigg] = \langle -\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi\rangle \quad \Rightarrow \quad (x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}$$

Zu b): Wegen $-\operatorname{Re}\lambda - 2 > -n$ ist $\|x\|^{-\lambda-2}$ und $\|x\|^{-\lambda}$ integrierbar (Das folgt durch Anwendung der Polarkoordinaten mit Funktionaldeterminante r^{n-1}).

$$\begin{aligned}
\left\langle u_{\|\cdot\|^{-\lambda}}, \Delta\varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{-\lambda}\Delta\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \partial_j^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}} \varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \partial_j \left[-\frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}-1} 2x_j \right] \varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \left[-\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{\lambda}{2}-1\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}-2} 4x_j^2 - \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}-1} 2 \right] \varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\lambda(\lambda+2)\|x\|^{-\lambda-4} \sum_{j=1}^n x_j^2 - n\lambda \|x\|^{-\lambda-2} \right] \varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(\lambda+2-n)\|x\|^{-\lambda-2}\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ gegeben durch } F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

stetig ist und dass $F' = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ gegeben durch } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, aber die Ableitung von f in Distributionen nicht mit der klassischen Ableitung übereinstimmt.

Lösung:
Zu a): Die Stetigkeit zeigen wir mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, die gegen y konvergiert. Dann gibt es

eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ mit $\{y, y_n, n \in \mathbb{N}\} \subset K$. Dann folgt

$$f(x)\chi_{[y_n,y]}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ f(y), & x = y. \end{cases}$$

$\left(f\chi_{[y_n,y]}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}),$ denn $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und $[y_n, y] \subset K$.

$\left|f(x)\chi_{[y_n,y]}(x)\right| \leq |f(x)|\chi_K(x)$ und $|f|\chi_K$ ist eine integrierbare Majorante, da $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt und der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) - F(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[y_n,y]}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(x)\chi_{[y_n,y]}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} 0dx = 0$$

und somit die Stetigkeit.
Wir berechnen die Ableitung:

$$\begin{aligned} \langle u_F, \varphi' \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{x_0}^{x} f(y)dy\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\int_{x_0}^{x} f(y)dy \right) \varphi(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = -\langle u_f, \varphi \rangle \quad \Rightarrow \quad u_F' = u_f \end{aligned}$$

Zu b): Wir beginnen mit der klassischen Ableitung:

$$\begin{aligned} x \neq 0: &\quad f'(x) = 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) \\ x = 0: &\quad \left|\frac{1}{x}\left(x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - 0 - 0\right)\right| \leq |x| \overset{x\to0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{ und damit } f'(0) = 0 \end{aligned}$$

Wegen dem $\frac{1}{x}$-Term gilt $f' \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und eine Distribution vom Funktionentyp macht als Distributionsableitung keinen Sinn. Ersetzt man $\frac{1}{x}$ durch $pv\frac{1}{x}$ so bekommen wir die Distributionsableitung

$$\begin{aligned} &\left\langle u_{2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)} + pv\left(\frac{1}{x}\right)2\pi\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), \varphi \right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon} \underbrace{\left[2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right]}_{\partial_x\left(x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right)}\varphi(x)dx + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\varphi(x)dx}_{|\cdot|\leq2\varepsilon^3\|\varphi\|_\infty\overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0}\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\left[-\int_{|x|\geq\varepsilon} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\varphi'(x)dx + \varepsilon^2\cos\left(\frac{\pi}{\varepsilon^2}\right)(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon))\right] \\ &= -\int_{\mathbb{R}} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\varphi'(x)dx = -\left\langle u_{x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}, \varphi \right\rangle \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad u'_{x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)} = u_{2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)} + pv\left(\frac{1}{x}\right)2\pi\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Sei

$$E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ gegeben durch } E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\kappa_{n-1}} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log \|x\|, & n = 2, \end{cases}$$

wobei $\kappa_{n-1} = \text{vol}(S^{n-1})$. Zeigen Sie, dass $\Delta E = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit Hilfe der Green-Formel.

b) Sei

$$E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \text{ gegeben durch } E(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|),$$

wobei H die Heaviside-Funktion bezeichnet. Zeigen Sie, dass $(\partial_t^2 - \partial_x^2)E = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Lösung:
Zu a): Wir schreiben E in Polarkoordinaten um

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\kappa_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log r, & n = 2, \end{cases}$$

Der Laplaceoperator in n-dim. Polarkoordinaten ist gegeben durch $\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}$. Für radialsymmetrische Funktionen wie E fällt der letzte Term weg. Sei $n \geq 3$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\langle u_E, \Delta\varphi \rangle &= \lim_{r \to 0} \int_{\|x\| \geq r} E(x) \Delta\varphi(x) dx \\
&\overset{\text{Green}}{=} \lim_{r \to 0} \left[\int_{\|x\| \geq r} \Delta E(x) \varphi(x) dx + \int_{\|x\|=r} E(x) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial E}{\partial r} ds \right] \\
\Delta E(r) &= \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) \left(-\frac{1}{(n-2)\kappa_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}} \right) \\
&= \frac{n-1}{\kappa_{n-1}} \frac{1}{r^n} + \frac{-n+1}{r} \frac{1}{\kappa_{n-1}} \frac{1}{r^{n-1}} = 0 \\
\int_{\|x\|=r} E(rs) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(rs) ds &= -\frac{1}{(n-2)\kappa_{n-1}} \int_{S^{n-1}} r^{-n+2} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(rs) r^{n-1} d\tilde{\varphi} \\
&= -\frac{r}{(n-2)} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(rs) d\tilde{\varphi} \overset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 \\
\int_{\|x\|=r} \varphi(rs) \frac{\partial E}{\partial r}(rs) ds &= \int_{S^{n-1}} \varphi(rs) \frac{1}{\kappa_{n-1}} \frac{1}{r^{n-1}} r^{n-1} d\tilde{\varphi} \overset{r \to 0}{\longrightarrow} \varphi(0) \\
\Rightarrow \quad \langle u_E, \Delta\varphi \rangle &= \langle \delta, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Für $n \geq 2$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ folgt das Ergebnis analog:

$$\Delta E(r) = \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right)\frac{1}{2\pi}\log r = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{r}\right] = 0$$

$$\int_{\|x\|=r} E(x)\frac{\partial\varphi}{\partial r}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r\cos\tilde{\varphi})rd\tilde{\varphi} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

$$\int_{\|x\|=r}\varphi\frac{\partial E}{\partial r}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\varphi(r\cos\tilde{\varphi})\frac{1}{r}rd\tilde{\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \varphi(0)$$

Zu b):

$$E(x,t) = \frac{1}{2}H(t-|x|) = \begin{cases}\frac{1}{2}, & |x| < t\\ 0, & |x| > t\end{cases}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned}\langle u_E, \left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\varphi\rangle &= \frac{1}{2}\int_{|x|<t}\partial_1^2\varphi(x,t) - \partial_2^2\varphi(x,t)dxdt\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|}^\infty \partial_2^2\varphi(x,t)dtdx - \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{-t}^t\partial_1^2\varphi(x,t)dxdt\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -\partial_2\varphi(x,|x|)dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty \partial_1\varphi(t,t) - \partial_1\varphi(-t,t)dt\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_2\varphi(x,|x|)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty\partial_2\varphi(x,x)dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^0\partial_2\varphi(x,-x)dx}_{\overset{t=-x}{=}\int_0^\infty\partial_2\varphi(-t,t)dt}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \langle u_E, \left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\varphi\rangle &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \underbrace{\partial_1\varphi(t,t) + \partial_2\varphi(t,t)}_{=\frac{d}{dt}\varphi(t,t)}\underbrace{-\partial_1\varphi(-t,t) + \partial_2\varphi(-t,t)}_{=\frac{d}{dt}\varphi(-t,t)}dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(0,0) + \varphi(-0,0)\right] = \varphi(0,0) = \langle\delta,\varphi\rangle\end{aligned}$$

und somit $\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)u_E = \delta$.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

a) Sei $a > 0$ und

$$f_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}.$$

Zeigen Sie, dass $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $f_a * f_b = f_{a+b}$ für $a, b > 0$. *Hinweis: Residuensatz*

b) Zeigen Sie, dass $(H*H)(x) = xH(x), \forall x$, wobei H die Heaviside-Funktion bezeichnet.

c) Zeigen Sie, dass $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Lösung:
Zu a): Diese Faltung kann man auf Funktionenlevel nachrechnen:

$$(f_a * f_b)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi^2} \frac{a}{x^2+a^2} \frac{b}{(x-y)^2+b^2} dy =: \int_{\mathbb{R}} h_x(y) dy$$

Dieses Integral kann nicht mit Partialbruchzerlegung gelöst werden, da die Einzelintegrale nicht konvergieren. Allerdings kann hier der Residuensatz angewendet werden. Dabei schlägt man einen Halbkreis vom Radius r in der oberen Halbebene und läßt ihn gegen unendlich gehen. Das Integral auf dem Kreis verhält sich wie r^{-2} und verschwindet somit für $r \to \infty$. Nachdem Residuensatz ist das Integral somit gleich $2\pi i$ mal der Summe der Resdiuen von h_x in den Nullstellen mit positiven Imaginärteil ia und $x + ib$.

$$\begin{aligned}
(f_a * f_b)(x) &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{ia} h_x + \operatorname{Res}_{x+ib} h_x\right] \\
&= \frac{2\pi i}{\pi^2} \frac{ab}{2ia\left((x-ia)^2+b^2\right)} + \frac{ab}{\left((x+ib)^2+a^2\right)2ib} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{b\left((x+ib)^2+a^2\right) + a\left((x-ia)^2+b^2\right)}{\left((x-ia)^2+b^2\right)\left((x+ib)^2+a^2\right)} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{(a+b)\left[x^2+2i(b-a)x-(b-a)^2\right]}{x^4+2i(b-a)x^3+4abx^2+2i(b^2-a^2)(a+b)x-(b^2-a^2)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{(a+b)\left[x^2+2i(b-a)x-(b-a)^2\right]}{(x^2+2i(b-a)x-(b-a)^2)(x^2+(a-b)^2)} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{a+b}{x^2+(a-b)^2} = f_{a+b}(x)
\end{aligned}$$

Zu b): Das lässt sich auch auf Funktionenlevel berechnen:

$$(H * H)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(y)H(x-y)dy = \begin{cases} \int_0^x 1dy = x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} = xH(x)$$

Zu c): Da die Deltadistribution keine Distribution vom Funktionentyp ist, kann diese Faltung auch nicht auf Funktionenlevel berechnet werden. Wir benutzen Definition 3.3.2 und die Existenzformel aus dem Beweis von 3.3.1 für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_a \otimes \delta_b, \widetilde{\varphi} \rangle = \left\langle \delta_b^y, \langle \delta_a^x, \varphi(x+y) \rangle \right\rangle = \left\langle \delta_b^y \varphi(a+y) \right\rangle = \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle$$