Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 8 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Es seien $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit angepassten Träger. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$x^k(u * v) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x^j u) * \left(x^{k-j} v\right),$$

wobei $x^k u := fu$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^k$.

Lösung:

Diese Aufgabe ist eine einfache Anwendung des binomischen Satzes und Aufrollen der Definitionen von Faltung und $x^k u$.

$$\begin{aligned}
\left\langle x^k(u*v), \varphi \right\rangle &\overset{\text{Def.}}{=} \left\langle (u*v), x^k\varphi \right\rangle \overset{\text{Def.}}{=} \left\langle v(y), \left\langle u(x), \chi(x,y)(x+y)^k \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \\
&\overset{\text{Bin.}}{=} \left\langle v(y), \left\langle u(x), \chi(x,y) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle v(y), y^{k-j} \left\langle u(x), x^j \chi(x,y)\varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle y^{k-j} v(y), \left\langle x^j u(x), \chi(x,y)\varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle (x^j u) * (x^{k-j} v), \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x^j u) * (x^{k-j} v), \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Finden Sie drei Distributionen $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, so dass die Träger von u und v angepasst sind, die Träger von v und w angepasst sind und

$$(u * v) * w \neq u * (v * w).$$

Lösung:

Wir wählen die Distributionen $u \equiv 1$, $v = \delta'$ und $w = H$, die Heaviside-Funktion. Dann sind die Träger $\operatorname{supp} u = \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} v = \{0\}$ und $\operatorname{supp} w = [0, \infty)$. Die Träger von u und v beziehungsweise von v und w sind angepasst, da der Träger von v kompakt ist (Bemerkung 3.3.4). Es gilt

$$\begin{aligned}
u * v &= 1 * \delta' \overset{3.3.3c)}{=} \partial(1 * \delta) = \partial 1 = 0 &&\Rightarrow \quad (u*v)*w = 0 \\
v * w &= \delta' * H \overset{3.3.3c)}{=} \partial(\delta * H) = \partial H = \delta &&\Rightarrow \quad u*(v*w) = 1 * \delta = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei

$$E_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ gegeben durch } E_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\kappa_{n-1}} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log \|x\|, & n = 2, \end{cases}$$

wobei $\kappa_{n-1} = \text{vol}(S^{n-1})$. In Serie 7 Aufgabe 3 wurde gezeigt, dass $\Delta E_n = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so dass $\varphi = 1$ in einer Umgebung der 0. Beweisen Sie, dass $\psi = \Delta(\varphi E_n) - \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

b) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi E_n) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $i = 1, \ldots, n$.

c) Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Folgern sie daraus mit a) und b), das $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Lösung:

Zu a):

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi E_n) &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\varphi E_n) = \sum_{i=1}^n \partial_i((\partial_i \varphi)E_n + \varphi \partial_i E_n) \\
&= \sum_{i=1}^n ((\partial_i^2 \varphi)E_n + 2(\partial_i \varphi)(\partial_i E_n) + \varphi \partial_i^2 E_n) \\
&= (\Delta \varphi)E_n + \varphi \Delta E_n + 2\sum_{i=1}^n (\partial_i \varphi)(\partial_i E_n)
\end{aligned}$$

Da für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\langle \varphi \Delta E_n, \psi \rangle = \langle \varphi \delta, \psi \rangle \overset{\text{Def.}}{=} \langle \delta, \varphi \psi \rangle = \varphi(0)\phi(0) \overset{\varphi(0)=1}{=} \langle \delta, \psi \rangle$$

folgt

$$\Delta(\varphi E_n) - \delta = (\Delta \varphi)E_n + 2\sum_{i=1}^n (\partial_i \varphi)(\partial_i E_n)$$

Da $\Delta\varphi$ und $\partial_i \varphi$ in einer Umgebung der 0 verschwinden (denn $\varphi = 1$ in einer Umgebung der 0) und E_n und $\partial_i E_n$ unendlich oft differenzierbar sind außerhalb jeder Umgebung der 0 ist auch $\Delta(\varphi E_n) - \delta$ unendlich oft differenzierbar. Außerdem sieht man an der rechten Seite, dass $\text{supp}(\Delta(\varphi E_n) - \delta) \subset \text{supp}\, \varphi$ und somit ist $\Delta(\varphi E_n) - \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Zu b): Wie in Serie 7 Aufgabe 3 berechnen wir

$$\partial_i(\varphi E_n) = (\partial_i\varphi)E_n + \varphi\partial_i E_n = (\partial_i\varphi)E_n + \varphi\frac{1}{\kappa_{n-1}}\frac{x_i}{\|x\|^n}$$

$(\partial_i\varphi)E_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\frac{|x_i|}{\|x\|^n}dx &\overset{x=r\omega}{=} \int_0^\infty \int_{S_1} |\varphi(r\omega)|\frac{r|\omega_i|}{r^n}r^{n-1}drd\omega \\ &= \int_0^\infty \int_{S_1} |\varphi(r\omega)||\omega_i|drd\omega < \infty,\end{aligned}$$

denn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $|\omega_i| \leq 1$ und somit ist auch $\varphi\frac{1}{\kappa_{n-1}}\frac{x_i}{\|x\|^n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Zu c): Sei $\psi = \Delta(\varphi E_n) - \delta$

$$u = u * \delta = u * \Delta(\varphi E_n) - (\Delta(\varphi E_n) - \delta)) = u * (\Delta(\varphi E_n) - u * (\Delta(\varphi E_n) - \delta)$$

Nach a) ist $\Delta(\varphi E_n) - \delta \in \mathcal{D}(R^n)$ und somit $u * (\Delta(\varphi E_n) - \delta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin gilt

$$u * \Delta(\varphi E_n) = \sum_{i=1}^n u * \partial_i^2(\varphi E_n) = \sum_{i=1}^n (\partial_i u) * \partial_i(\varphi E_n)$$

Nach Voraussetzung ist $\partial_i u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und nach b) ist $\partial_i(\varphi E_n) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, das für $f \in L^2(R^n)$ und $g \in L^1(R^n)$ folgt $f*g \in L^2(R^n)$:

$$\begin{aligned}\|f * g\|^2_{L^2(R^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(y)\right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y-x)||g(y)|^{\frac{1}{2}}|g(y)|^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx \\ &\overset{\text{CS}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y-x)|^2|g(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dydx \\ &\overset{\text{Fubini}}{\leq} \|g\|_{L^1(R^n)} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y-x)|^2 dx|g(y)|dy \\ &= \|g\|_{L^1(R^n)}\|f\|^2_{L^2(R^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy = \|g\|^2_{L^1(R^n)}\|f\|^2_{L^2(R^n)}\end{aligned}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Wir definieren $\mathcal{D}'_+ := \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} u \in [0,\infty)\}$

a) Seien $u, v \in \mathcal{D}'_+$. Beweisen Sie, dass die Träger von u und v angepasst sind und dass $u * v \in \mathcal{D}'_+$. Was ist das Einselement der Faltung in $\mathcal{D}'_+$?

b) Für $u \in \mathcal{D}'_+$ bezeichnen wir mit u^{-1} die eindeutig definierte Distribution v mit $u * v = \delta$. Berechnen Sie H^{-1}, $(\delta')^{-1}$ und $(\delta' - \lambda\delta)^{-1}$.

c) Sei $P(D)$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, das heißt

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

ist ein Polynom und

$$P(D) = \sum_{k=1}^{m} a_k \partial^k.$$

Was stellt die Distribution $[P(D)\delta]^{-1}$ dar? Seien $z_1, \dots, z_m$ die Nullstellen von P. Zeigen Sie, dass

$$[P(D)\delta]^{-1} = \frac{1}{a_m} He^{z_1 x} * He^{z_2 x} * \cdots * He^{z_m x}.$$

Folgern Sie daraus, dass jeder von Null verschiedene Differentialoperator auf $\mathbb{R}$ mit konstanten Koeffizienten eine Fundamentallösung hat.

Lösung:

Zu a): Sei $u, v \in \mathcal{D}'_+$ und $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Es ist zeigen, dass

$$M_K = \{(x,y) \in \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v \mid x + y \in K\}$$

kompakt ist. M_K ist (immer) abgeschlossen, denn $M_K \ni (x_n, y_n) \to (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ impliziert $x_n + y_n \to x + y \in K$, da K abgeschlossen, und somit $(x,y) \in K$. M_K ist beschränkt: Da K kompakt ist, gibt es ein $R > 0$, so dass $K \subset B_R(0)$. Dann folgt für $(x,y) \in M_K$, $0 \le x, y \le x + y < R$ und somit $M_K \subset B_{\sqrt{2}R}(0)$.
Da $\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v \subset [0,\infty) + [0,\infty) = [0,\infty)$ ist $u * v$ wieder in $\mathcal{D}'_+$.
Das Einselement der Faltung ist wie immer δ und $\operatorname{supp} \delta = \{0\} \subset [0,\infty)$, also $\delta \in \mathcal{D}'_+$.

Zu b): Angenommen $X = H^{-1}$ ist gegeben. Dann würde folgen

$$X * H = \delta \quad \overset{\partial}{\Rightarrow} \quad X * \delta = X * H' = \partial(X * H) = \delta' \quad \Rightarrow \quad X = H^{-1} = \delta'$$

Angenommen $Y = (\delta')^{-1}$ ist gegeben. Dann würde folgen

$$\delta = Y * \delta' = Y' * \delta \quad \Rightarrow \quad Y' = \delta \quad \Rightarrow \quad Y = (\delta')^{-1} = H$$

Angenommen $Z = (\delta' - \lambda\delta)^{-1}$ ist gegeben. Dann würde folgen

$$
\begin{aligned}
&\delta = Z * (\delta' - \lambda\delta) = Z * \delta' - \lambda Z * \delta = Z' - \lambda Z \\
\overset{Z=e^{\lambda x}V}{\Rightarrow}\quad &\delta = e^{\lambda x}V' + \lambda e^{\lambda x}V - \lambda e^{\lambda x}V = e^{\lambda x}V' \\
\Rightarrow\quad &V' = e^{-\lambda x}\delta = e^{-\lambda 0}\delta = \delta \\
\Rightarrow\quad &V = H \quad \Rightarrow \quad Z = (\delta' - \lambda\delta)^{-1} = e^{\lambda x}H
\end{aligned}
$$

Zu c): Für $X = [P(D)\delta]^{-1}$ gilt

$$\delta = X * P(D)\delta = P(D)[X * \delta] = P(D)X$$

und somit stellt $[P(D)\delta]^{-1}$ eine Fundamentallösung von $P(D)$ dar.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es die Darstellung

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a(z - z_1)\cdots(z - z_m), \quad a \neq 0 \\
\Rightarrow \quad P(D)\delta &= a(\partial - z_1)\cdots(\partial - z_m)\delta \\
&= a(\partial - z_1)\cdots(\partial - z_{m-1})(\delta' - z_m\delta) \\
&= a(\partial - z_1)\cdots(\partial - z_{m-1})\left[\delta * (\delta' - z_m\delta)\right] \\
&= a(\partial - z_1)\cdots(\partial - z_{m-2})\left[(\delta' - z_{m-1}\delta) * (\delta' - z_m\delta)\right] \\
&= \ldots = a(\delta' - z_1\delta) * \cdots * (\delta' - z_m\delta)
\end{aligned}
$$

Damit und mit b) folgt

$$
\begin{aligned}
[P(D)\delta]^{-1} &= \frac{1}{a}(\delta' - z_m\delta)^{-1} * \cdots * (\delta' - z_1\delta)^{-1} \\
&\overset{b)}{=} \frac{1}{a}e^{z_1 x}H * \cdots * e^{z_m x}H
\end{aligned}
$$