Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 9 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei A eine symmetrische Matrix mit reellen Einträgen, so dass

$$\exists \alpha > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $e^{-\langle Ax,x\rangle} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

b) Sei A zusätzlich diagonal. Berechnen Sie $\mathcal{F}(e^{-\langle Ax,x\rangle})$.

c) Sei A nun wieder eine beliebige symmetrische Matrix mit reellen Einträgen. In der linearen Algebra wurde gezeigt, dass es eine orthogonale Matrix O mit $OAO^T = D$ diagonal gibt. Schließen Sie daraus mit Hilfe von b) auf

$$\mathcal{F}\left(e^{-\langle Ax,x\rangle}\right)(\xi) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\det A|}} e^{-\pi^2\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}.$$

Lösung:

Zu a): Aus $e^{-\langle Ax,x\rangle} \leq e^{-\alpha\|x\|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ folgt $e^{-\langle Ax,x\rangle} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Zu b): Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Dann gilt $a_i = \langle Ae_i, e_i\rangle \geq \alpha \ \forall i = 1, \dots, n$ und $\det A = a_1 \cdots a_n > 0$. Somit ist A invertierbar und es gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-\langle Ax,x\rangle}\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i^2} dx \overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-a_i x_i^2} dx_i = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}\left(e^{-a_i x_i^2}\right) \\
&\overset{\text{VL}}{=} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} e^{-\frac{\pi^2}{a_i}\xi_i^2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}} e^{-\pi^2 \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\xi_i^2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\det A|}} e^{-\pi^2\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}
\end{aligned}$$

Zu c):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-\langle Ax,x\rangle}\right)(\xi) &= \mathcal{F}\left(e^{-\langle O^T DOx,x\rangle}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(e^{-\langle DOx,Ox\rangle}\right)(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} e^{-\langle DOx,Ox\rangle} dx \overset{O \text{ orthogonal}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle Ox,O\xi\rangle} e^{-\langle DOx,Ox\rangle} dx \\
&\overset{y=Ox}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle y,O\xi\rangle} e^{-\langle Dy,y\rangle} dy = \mathcal{F}\left(e^{-\langle Dy,y\rangle}\right)(O\xi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{b)}{=} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\det D|}} e^{-\pi^2\langle D^{-1}O\xi, O\xi\rangle} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\det O^T \det D \det O|}} e^{-\pi^2\langle O^{-1}D^{-1}(O^T)^{-1}\xi,\xi\rangle} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\det O^T DO|}} e^{-\pi^2\langle (O^T DO)^{-1}\xi,\xi\rangle} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\det A|}} e^{-\pi^2\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Beweisen Sie:

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in N_0^n,\ N \in \mathbb{N}\ \exists C > 0 : |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1+\|x\|)^{-N}\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Die Funktion $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ habe „polynomiales Wachstum“, das heißt

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ und } C > 0 \text{ mit } |\partial^\alpha a(x)| \leq C(1+\|x\|)^N\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass der Operator $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ f \mapsto af$ stetig ist.

Lösung:
Zu a): „$\Rightarrow$“ : Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $N \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha f(x)| &\leq \frac{(1+\|x\|)^N}{(1+\|x\|)^N}|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{(1+|x_1|+\ldots+|x_n|)^N}{(1+\|x\|)^N}|\partial^\alpha f(x)| \\
&\leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n+1}} a_\beta \left| x^\beta \partial^\alpha f(x) \right| (1+\|x\|)^{-N} \overset{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}{\leq} \underbrace{\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n+1}} a_\beta C_{\alpha,\beta}}_{=:C} (1+\|x\|)^{-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

„$\Leftarrow$“ : Erfülle f nun die rechte Seite und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

$$\left| x^\beta \partial^\alpha f(x) \right| \leq \|x\|^{|\beta|} |\partial^\alpha f(x)| \leq \|x\|^{|\beta|} C(1+\|x\|)^{-|\beta|} \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Zu b): Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $N \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha (af)(x)| (1+\|x\|)^N &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \underbrace{\left| \partial^\beta a(x) \right|}_{\leq C_\beta (1+\|x\|)^{N_\beta}} \left| \partial^{\alpha-\beta} f(x) \right| (1+\|x\|)^N \\
&\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_\beta \left| \partial^{\alpha-\beta} f(x) \right| (1+\|x\|)^{N+N_\beta} \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_\beta \|f\|_{\alpha-\beta, N+N_\beta} \\
\Rightarrow \quad \|af\|_{\alpha,N} &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha,a,\beta} \|f\|_{\alpha-\beta, N+N_\beta}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie:

a) $k \geq 0: \quad f \in C_0^k(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \left(\exists C: \ \forall \xi \quad \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{-k}\right)$

b) $k \geq 2: \quad \left(\exists C: \ \forall \xi \quad \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{-k}\right) \quad \Rightarrow \quad f \in C_0^{k-2}.$

Also: Der Grad der Differenzierbarkeit entspricht ungefähr der Potenz des Abfalls von $\hat{f}$ bei ∞.

Lösung:

Zu a):

$$\begin{aligned}
|\xi| \geq 1: \quad \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = f(x)\frac{i}{\xi}e^{-ix\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f'(x)\frac{i}{\xi}e^{-ix\xi}dx \overset{f\in C_0^k(\mathbb{R})}{=} \frac{-i}{\xi}\widehat{f'}(\xi) \\
&= \ldots = \left(\frac{-i}{\xi}\right)^k \widehat{f^{(k)}}(\xi) \\
\Rightarrow \quad \left|\hat{f}(\xi)\right| &\leq \frac{1}{|\xi|^k}\int_{\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| dx \overset{|\xi|\geq 1}{\leq} 2\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}(1+|\xi|)^{-k} \\
|\xi| < 1: \quad \left|\hat{f}(\xi)\right| &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \overset{|\varepsilon|>1}{\leq} 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}(1+|\xi|)^{-k}
\end{aligned}$$

Zu b): Es gilt die Umkehrformel

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Die Funktion $\xi \mapsto \left|\xi^{k-2}\hat{f}(\xi)\right|$ ist integrierbar denn:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\xi^{k-2}\hat{f}(\xi)\right| d\xi \leq C\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{k-2}}{(1+|\xi|)^k}d\xi \leq C\int_0^\infty \frac{1}{(1+\rho)^2}d\rho = C\int_1^\infty \frac{1}{\eta^2}d\eta = C\left[-\frac{1}{\eta}\right]_1^\infty = C$$

Somit dürfen Ableitung und Integral vertauscht werden:

$$f^{k+2}(x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k e^{ix\xi}}{\partial x^k}\hat{f}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^{k-2}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Die Poissonsche Summenformel ist in der Sprache der Distributionen

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx} = 2\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi l}(x). \tag{1}$$

Äquivalente Formulierungen sind

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k) = 2\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi l) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{2}$$

und

$$\widehat{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k} = 2\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi l}. \tag{3}$$

Zeigen Sie diese Äquivalenz und beweisen Sie die Formel. Anleitung zum Beweis: Zeigen Sie:

a) Die Reihe $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}$ konvergiert in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

b) $f(x+2\pi) = f(x)$ und $e^{ix}f(x) = f(x)$.

c) $f = c \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi l}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mit $xg = 0$ impliziert $g = C\delta$ für eine Zahl C ist.

d) Es ist noch $c = 2\pi$ zu zeigen. Die zu (2) analoge Aussage mit c vor der zweiten Summe folgt aus c). Wenden Sie diese auf $\varphi(x) = \psi(x-t)$ an und integrieren Sie über $t \in [0, 2\pi]$. Welche Bedingungen sollte ψ erfüllen, damit dies das gewünschte Resultat liefert?

Lösung:

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Nach a) konvergieren die Terme auf den linken Seiten und es kann nach dem Satz über dominierte Konvergenz Integral und Reihe vertauscht werden.

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}\varphi(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\varphi(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \delta_k, \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k, \widehat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \widehat{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k}, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

Der Träger $\operatorname{supp}\varphi$ ist kompakt und somit beschränkt, so dass die rechten Seiten tatsächlich nur aus endlichen Summen besteht.

$$\left\langle 2\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi l}, \varphi \right\rangle = 2\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi l)$$

Als Distributionen sind die linken bzw. rechten Seiten gleich, was die Äquivalenz der Aussagen zeigt.
Zu a): Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann ist $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und somit gibt es ein $C > 0$, so dass $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-2}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k)\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(k)| \leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+k)^2} \leq 2C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Zu b):

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik(x+2\pi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}\left(e^{2\pi i}\right)^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx} = f(x) \\ e^{ix} f(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ix+ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(k+1)x} \overset{l=k+1}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{ilx} = f(x) \end{aligned}$$

Zu c): Wir zeigen zuerst den Tipp: Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\chi = 1$ in einer Umgebung der 0. Dann ist

$$\widetilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}(\varphi(x) - \chi(x)\varphi(0)), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \varphi(0)\chi(x) + x\widetilde{\varphi}(x).$$

Damit folgt

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \varphi(0)\chi + x\widetilde{\varphi} \rangle = \varphi(0)\langle g, \chi \rangle + \langle xg, \widetilde{\varphi} \rangle = \varphi(0) \underbrace{\langle g, \chi \rangle}_{=:C} = \langle C\delta, \varphi \rangle .$$

Allgemein: Aus b) ist bekannt, dass $(e^{ix} - 1)f(x) = 0$ und die Nullstellen von $e^{ix} - 1$ sind $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Sei $\chi \in C_0^\infty((-\pi, \pi))$ mit $\chi = 1$ in einer Umgebung von 0 und $\chi_l(x) := \chi(x - 2\pi l)$. Dann folgt

$$\langle f, \chi_l \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi(x - 2\pi l)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\pi l)\chi(x)dx \overset{b)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi(x)dx = \langle f, \chi \rangle.$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\operatorname{supp} \varphi \subset [-2\pi N, 2\pi N]$. Dann ist $\widetilde{\varphi}(x) := (e^{ix} - 1)^{-1} \left(\varphi(x) - \sum\limits_{l=-N}^{N} \varphi(2\pi l)\chi_l(x)\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und es folgt

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \left\langle f, \sum_{l=-N}^{N} \varphi(2\pi l)\chi_l + (e^{ix} - 1)\widetilde{\varphi} \right\rangle = \sum_{l=-N}^{N} \varphi(2\pi l) \langle f, \chi_l \rangle + \left\langle (e^{ix} - 1)f, \widetilde{\varphi} \right\rangle \\ &= \sum_{l=-N}^{N} \varphi(2\pi l) \underbrace{\langle f, \chi \rangle}_{=:C} = C \sum_{l=-N}^{N} \langle \delta_{2\pi l}, \varphi \rangle = C \left\langle \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi l}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Zu d): Wir rechnen erst einmal formal. Mit

$$\widehat{\varphi}(k) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-t)e^{ixk}dx \overset{y=x-t}{=} \int_{\mathbb{R}} \psi(y)e^{iyk+itk}dy = e^{itk}\widehat{\psi}(k)$$

folgt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \widehat{\varphi}(k)dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(k) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{itk}dt}_{=2\pi\delta_k} = 2\pi\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx.$$

Andererseits gilt

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi l)dt = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \psi(2\pi l - t)dt \overset{s=2\pi l-t}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi(l-1)}^{2\pi l} \psi(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx$$

Wir können also jede Funktion $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ nehmen, deren Integral nicht verschwindet.