05.05.2014

3. Theorie der Distributionen

3.1 Definition und fundamentale Eigenschaften

Die Distributionen sind eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktion. Eine Distribution ist unendlich oft differenzierbar und somit ist es leichter eine Distribution-Lösung einer PDG zu finden.
Als Beispiel betrachten wir das Cauchy-Problem (Gleichung der schwingenden Seite):

$$(3.1.1)\quad \begin{cases} \partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ u\big|_{x_2=0} = f(x_1) & \text{auf } \mathbb{R} \\ \partial_2 u\big|_{x_2} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \end{cases}$$

Wir suchen zunächst $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ die (3.1.1) erfüllt und nehmen an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Die allgemeine Lsg von $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$ ist $u(x) = h(x_1+x_2) + g(x_1-x_2)$. Also $f(x_1) = u(x_1, 0) = h(x_1) + g(x_1)$ und $0 = h'(x_1) - g'(x_1)$.
Somit $h'(x_1) = g'(x_1)$ und durch Integration $\int_0^{x_1}$
$h(x_1) - h(0) = g(x_1) - g(0)$ also $f(x_1) = 2h(x_1) - h(0) + g(0)$
und $h(x_1) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2}(h(0) - g(0))$, $g(x_1) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2}(h(0) - g(0))$

$$(3.1.2)\quad u(x) = \frac{1}{2}\left[f(x_1+x_2) + f(x_1-x_2)\right]$$

Dies ist die eindeutige Lsg von (3.1.1), falls $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
Falls $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, ist u nur der Klasse $\mathcal{C}^1$ und wir können $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u$ nicht bilden. Trotzdem hat (3.1.2) eine enge Verbindung zur Gleichung (3.1.1).

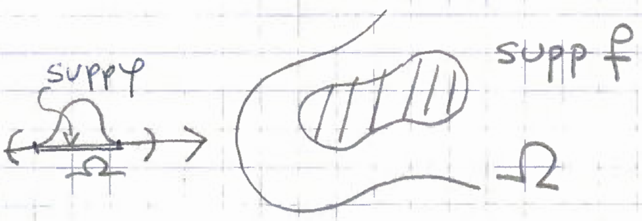
Um diese Beziehung zu entdecken, formulieren wir die Gleichung $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$ für $u \in \mathcal{C}^2$ als eine Integralgleichung um.

Partielle Integration in $\mathbb{R}^n$.

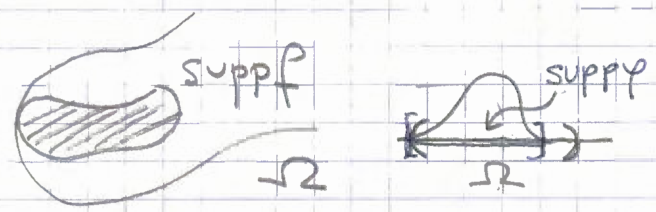
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Fkt, so ist der Träger von f die Menge $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ (Abschluss in der relativen Topologie von Ω).

f hat kompakten Träger $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{supp} f$ ist kompakt in Ω

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{supp} f$ kompakt in $\mathbb{R}^n$ und $\operatorname{supp} f \subset \Omega$



Der Träger ist kompakt in Ω

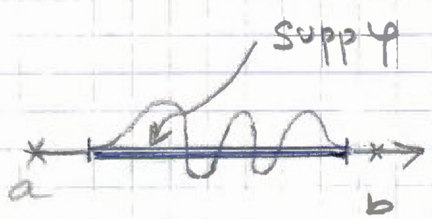


Der Träger ist nicht kompakt in Ω

Die Menge der $\mathcal{C}^k$-Funktionen mit kompakten Träger in Ω wird mit $\mathcal{C}_0^k(\Omega) = \{ f \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt in } \Omega \}$ bezeichnet. Wir haben die Formel der partiellen Integration:

$$(3.1.3) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x)\, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx$$

für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$.



Beweis Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\, dx = \int_a^b \varphi'(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a) = 0 - 0 = 0$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt sind, dass $\operatorname{supp} \varphi \subset (a, b)$ also $\varphi(b) = 0 = \varphi(a)$.

Da supp g kompakt ist, so gibt es $A>0$ mit $\operatorname{supp} g \in (-A,A)^n$.
Also $fg=0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus [-A,A]^n$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\,dx = \int_{[-A,A]^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\,dx = \int_{[-A,A]^{n-1}} \left[\int_{-A}^{A} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\,dx_i\right] dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

wobei $\widehat{dx_i}$ bedeutet, dass dx_i fehlt. Nun hat die Fkt
$x_i \mapsto (fg)(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n)$ kompakten Träger in $(-A,A)$
für alle $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ also $\int_{-A}^{A} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\,dx_i = 0$

$\rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\,dx = 0 \rightsquigarrow$ Behauptung. $\boxtimes$

Durch Iteration erhalten wir für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$(3.1.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x)\, g(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \partial^\alpha g(x)\,dx, \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Sei nun $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dann

$$0 = \int (\partial_1^2 u - \partial_2^2 u)\varphi\,dx \overset{3.1.4}{=} \int u\,(\partial_1^2 \varphi - \partial_2^2 \varphi)\,dx$$

also

$$(3.1.5) \qquad \int u\,(\partial_1^2 \varphi - \partial_2^2 \varphi)\,dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Wir zeigen, dass für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ die Funkt u aus (3.1.2) die Gleichung (3.1.5) erfüllt. Es reicht (3.1.5) für $u(x) = f(x_1+x_2)$ zu zeigen. Betrachten wir x_1+x_2 als neue Variable, so müssen wir zeigen

$$\int f(x_1)\left[\partial_1^2 \varphi(x_1-x_2, x_2) - \partial_2^2 \varphi(x_1-x_2, x_2)\right] dx = 0.$$

Kettenregel $\rightsquigarrow$ $\partial_2\left[\varphi(x_1-x_2, x_2)\right] = -\partial_1 \varphi(x_1-x_2, x_2) + \partial_2 \varphi(x_1-x_2, x_2)$

Also $\partial_2^2[\varphi(x_1-x_2,x_2)] = \partial_2[-\partial_1\varphi(\dots)] + \partial_2[\partial_2\varphi(\dots)]$

$$\leadsto \partial_2^2[\varphi(\dots)] + \partial_2[\partial_1\varphi(\dots)] = -\partial_1\partial_2\varphi(\dots) + \partial_2^2\varphi(\dots)$$

und $$\partial_2[\partial_1\varphi(\dots)] = -\partial_1^2\varphi(\dots) + \partial_1\partial_2\varphi(\dots) \quad (+)$$

$$\leadsto \partial_2^2[\varphi(\dots)] + 2\,\partial_2[\partial_1\varphi(\dots)] = (\partial_2^2\varphi - \partial_1^2\varphi)(\dots)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1)\partial_2\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x_1)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_2\psi(x_1,x_2)\,dx_2\right)}_{=0\ \forall x_1\in\mathbb{R}} dx_1 = 0,\ \forall \psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

$$\leadsto \int f(x_1)(\partial_1^2\varphi - \partial_2^2\varphi)(x_1-x_2,x_2)\,dx = \int f(x_1)[-\partial_2^2\psi_1 - 2\partial_2\psi_2]\,dx = 0$$

Fazit: Die Fkt $u(x) = \frac{1}{2}[f(x_1+x_2) + f(x_1-x_2)]$ erfüllt auch für $f\in\mathcal{C}^1$ die Gleichung (3.1.5) wir können sie als verallgemeinerte Lösung von (3.1.1) betrachten.

Dabei assoziieren wir zu u eine lin. Abbildung $T_u: \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{C}$ $T_u(\varphi) = \int u\varphi$ und wir sagen dass u eine verallg. Lsg von (*) ist, wenn $T_u(\partial_1^2\varphi - \partial_2^2\varphi) = 0$, $\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

Eine lin. Abbildung von einem VR in den Grundkörper heißt Funktional. Die Distributionen sind lineare Funktionale auf $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ die eine gewisse Stetigkeitseigenschaft haben. Dafür definieren wir die Konvergenz in $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

<u>3.1.1. Definition</u> Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Eine Folge $(\varphi_j)_j$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ heißt konvergent gegen $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ wenn für jedes Kompaktum $K\subset\Omega$ und jedes $m\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\le m}} |\partial^\alpha(\varphi_j - \varphi)| = 0$$