Also $\partial_2^2[\varphi(x_1-x_2,x_2)] = \partial_2[-\partial_1\varphi(\ldots)] + \partial_2[\partial_2\varphi(\ldots)]$

$$\left.\begin{aligned} &\rightsquigarrow \partial_2^2[\varphi(\ldots)] + \partial_2[\partial_1\varphi(\ldots)] = -\partial_1\partial_2\varphi(\ldots) + \partial_2^2\varphi(\ldots) \\ &\text{und} \quad \partial_2[\partial_1\varphi(\ldots)] = -\partial_1^2\varphi(\ldots) + \partial_1\partial_2\varphi(\ldots) \end{aligned}\right| (+)$$

$$\rightsquigarrow \partial_2^2[\varphi(\ldots)] + 2\partial_2[\partial_1\varphi(\ldots)] = (\partial_2^2\varphi - \partial_1^2\varphi)(\ldots)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1)\partial_2\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x_1)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}}\partial_2\psi(x_1,x_2)\,dx_2\right)}_{=0\ \forall x_1\in\mathbb{R}}dx_1 = 0, \ \forall\psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

$$\rightsquigarrow \int f(x_1)(\partial_1^2\varphi - \partial_2^2\varphi)(x_1-x_2,x_2)\,dx = \int f(x_1)[-\partial_2^2\psi_1 - 2\partial_2\psi_2]\,dx = 0$$

Fazit: Die Fkt $u(x) = \frac{1}{2}[f(x_1+x_2) + f(x_1-x_2)]$ erfüllt auch für $f\in\mathcal{C}^1$ die Gleichung (3.1.5) wir können sie als verallgemeinerte Lösung von (3.1.1) betrachten.

Dabei assoziieren wir zu u eine lin. Abbildung $T_u: \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{C}$ $T_u(\varphi) = \int u\varphi$ und wir sagen dass u eine verallg. Lsg von (3.1.1) ist, wenn $T_u(\partial_1^2\varphi - \partial_2^2\varphi) = 0, \ \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

Eine lin. Abbildung von einem VR in der Grundkörper heißt Funktional. Die Distributionen sind lineare Funktionale auf $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ die eine gewisse Stetigkeitseigenschaft haben. Dafür definieren wir die Konvergenz in $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

07.05.2015

<u>3.1.1. Definition</u> Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Eine Folge $(\varphi_j)_j$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ heißt konvergent gegen $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ wenn für jedes Kompaktum $K\subset\Omega$ und jedes $m\in\mathbb{N}_0$ gilt

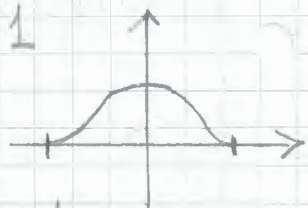
$$\lim_{j\to\infty}\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le m}}|\partial^\alpha(\varphi_j-\varphi)| = 0$$

Dies bedeutet, dass (φ_j) und alle ihre Ableitungen konvergiert gleichmäßig auf alle kompakten Teilmengen von Ω. In Funktionalanalysis wird gezeigt, dass eine Topologie auf $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ existiert, wofür die konvergente Folgen genau die aus Def. 3.1.1 sind. In dieser Zusammenhang wird $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ durch $\mathcal{E}(\Omega)$ bezeichnet.

<u>Beispiel: Faltung.</u> Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(3.1.6) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) &, \|x\| < 1 \\ 0 &, \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

wobei $C^{-1} = \int_{\|x\|<1} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right) dx$. Dann gilt



$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi = \overline{B_1(0)}$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = 1$.

Für $\varepsilon > 0$ definiere $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$. Dann gilt

$\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi = \overline{B_\varepsilon(0)}$, $\varphi_\varepsilon \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, dx = 1$.

Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung von f mit φ_ε ist

$$(3.1.7) \quad f_\varepsilon(x) = (f * \varphi_\varepsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi_\varepsilon(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon y) \varphi(y) \, dy$$

Differentiation unter Integralzeichen $\rightsquigarrow$ $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x - \varepsilon y) \varphi(y) \, dy$. Da $\partial^\alpha f(x) = \int \partial^\alpha f(x) \varphi(y) \, dy$,

$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) - \partial^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\partial^\alpha f(x - \varepsilon y) - \partial^\alpha f(x) \right] \varphi(y) \, dy$ somit

$$\sup_{x \in K} \left| \partial^\alpha f_\varepsilon(x) - \partial^\alpha f(x) \right| \leq \sup_{\substack{x \in K \\ y \in \overline{B_1(0)}}} \left| \partial^\alpha f(x - \varepsilon y) - \partial^\alpha f(x) \right| \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, dx$$

$\partial^\alpha f$ ist stetig, also gleichmäßig stetig auf der kompakten

Menge $K_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \leq 1\}$, wobei $d(x,K) = \inf_{y\in K} \|x-y\|$ die Abstand von x nach K ist. Sei $\delta > 0$. Dann $\exists \varepsilon_0$ so dass für alle $z_1, z_2 \in K_1$, $\|z_1 - z_2\| < \varepsilon_0$ gilt $|\partial^\alpha f(z_1) - \partial^\alpha f(z_2)| \leq \delta$.

Insbesondere für alle $x \in K$, $y \in \overline{B_1(0)}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ gilt $z_1 = x$, $z_2 = x - \varepsilon y \in K_1$

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0 : \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f_\varepsilon(x) - \partial^\alpha f(x)| \leq \sup_{\substack{x\in K \\ y \in \overline{B_1(0)}}} |\partial^\alpha f(x-\varepsilon y) - \partial^\alpha f(x)| \leq \delta$$

Somit $f_\varepsilon \to f$ in $\mathcal{E}(\Omega)$, $\varepsilon \to 0$.

<u>3.1.2 Definition</u> Eine Folge (φ_j) in $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ falls es $K \subset \Omega$ kompakt gibt, so dass (a) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, $j = 1, 2, \dots$ und (b) $\varphi_j \to \varphi$, $j \to \infty$ in $\mathcal{E}(\Omega)$.

Anstelle von (b) können wir (b') fördern (wegen (a)):

(b') $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$, $j \to \infty$ gleichmäßig.

In der Funktionalanalysis zeigt man, dass es ein Topologie auf $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ gibt, so dass die konvergenten Folgen genau die aus 3.1.2 sind. Der VR $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ versehen mit dieser Topologie wird $\mathcal{D}(\Omega)$ bezeichnet.

<u>Beispiel</u> (1) Sei $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ und $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$ die Faltung (3.1.7). Sei $K = \operatorname{supp} f$, $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \leq \varepsilon\}$. Dann gilt $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset K_\varepsilon$ (Beweis?). Sei $d = d(K, \partial\Omega) = \inf\{\|x-y\| : x \in K, y \in \partial\Omega\}$

Da K kompakt, $\partial\Omega$ abgeschlossen, $K \cap \partial\Omega = \emptyset \leadsto d > 0$.

Sei nun $\delta \in (0, d)$. Dann $K_\delta \subset \Omega$ und für alle $\varepsilon < \delta$ gilt $\operatorname{supp} f_\varepsilon = K_\varepsilon \subset K_\delta$, d.h. $\operatorname{supp} f_\varepsilon$ ist für alle $\varepsilon < \delta$ in einem festen Kompaktum K_δ enthalten. Da $f_\varepsilon \to f$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ folgt $f_\varepsilon \to f$, $\varepsilon \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

(2) Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \not\equiv 0$ und $\varphi_j(x) = \varphi(x-j)$, $j \in \mathbb{N}$. Dann $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ $\varphi_j \to 0$, $j \to \infty$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ aber (φ_j) konvergiert nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3.1.3 Definition Eine Distribution auf Ω ist ein lineares Funktional $u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, das konvergente Folgen in $\mathcal{D}(\Omega)$ in konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ abbildet.

3.1.4 Satz Ein lineares Funktional $u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ ist eine Distribution $\Longleftrightarrow$ $\forall K \subset \Omega$ kompakt $\exists C = C(K)$ $\exists k = k(K)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset K$:

(3.1.8) $$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq k\}$$

wobei $\langle u, \varphi \rangle := u(\varphi)$.

Beweis „$\Rightarrow$" Angenommen $\exists K \subset \Omega$ kompakt $\forall j \in \mathbb{N}$ $\exists \varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$: $|\langle u, \varphi_j \rangle| > j \sup\{|\partial^\alpha \varphi_j(x)| : x \in K, |\alpha| \leq j\}$.
Sei $\psi_j := \varphi_j / \langle u, \varphi_j \rangle$. Dann $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi_j \subset K$ und $\langle u, \psi_j \rangle = 1$. Aber $|\partial^\alpha \psi_j(x)| < 1/j$ für $|\alpha| \leq j$ und alle $x \in \Omega$.
Es folgt $\psi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\langle u, \psi_j \rangle \to 1 \neq \langle u, 0 \rangle = 0$. ↯ ▨

Bemerkungen (1) $\mathcal{D}'(\Omega) := \{u \text{ Distribution auf } \Omega\}$.
$\mathcal{D}'(\Omega)$ ist ein $\mathbb{C}$-VR. Der Satz 3.1.4 zeigt
$\mathcal{D}'(\Omega) = \{u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} : u \text{ linear \& stetig}\}$, der Dualraum von $\mathcal{D}(\Omega)$ im Sinne der Funktionalanalysis.

(2) Kann k in (3.1.8) unabhängig von K gewählt werden, so heißt u Distrib. von Ordnung $\leq k$. Die kleinste k heißt Ordnung von u.

3.1.5 Beispiele (1) Distribution von Funktion-Typ.
Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $d\lambda$ bezeichnet.
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar und $f: A \to \mathbb{C}$ meßbar.
f heißt integrierbar falls $\int_A |f(x)|\,dx := \int_A |f(x)|\,d\lambda(x) < \infty$
Sei $L^1(A) = \{f : A \to \mathbb{C} \text{ integrierbar}\}/\sim$, wobei $f \sim g$ falls $f = g$ fast überall (f.ü.) d.h. $\exists N \subset A$ Nullmenge mit $f = g$ auf $A \setminus N$.

Der Raum der lokal-integrierbaren Funktionen ist

$$L^1_{loc}(A) := \{ f : A \to \mathbb{C} : f \text{ Lebesgue-meßbar und } \int_K |f| d\lambda < \infty \text{ für jedes } K \subset A \text{ kompakt} \}$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Einer Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ assoziieren wir die Distribution u_f durch

$$\langle u_f, \varphi \rangle := \int f(x)\varphi(x)\,dx \,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dann gilt $|\langle u_f, \varphi\rangle| \leq C \sup_K |\varphi|$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ also (3.1.8) is erfüllt mit $k=0$ und $C = \int_K |f|\,dx$.

u_f ist also eine Distribution von Ordnung 0.

<u>3.1.6 Lemma</u> Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, so dass $\int f\varphi\,dx = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann ist $f = 0$ fast überall.

<u>Beweis</u> Sei $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, mit φ wie in (3.1.6). Man kann zeigen, dass für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so ist $f * \varphi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f * \varphi_\varepsilon \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \to 0$.

Sei nun $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$. Für $x \in B_r(x_0)$ und $\varepsilon < r$ hat die Funktion $y \mapsto \varphi_\varepsilon(x-y)$ Träger in $B_{2r}(x_0)$

Sei $\tilde{f} = \mathbb{1}_{B_{2r}(x_0)} f$. Es gilt

$$\tilde{f} * \varphi_\varepsilon(x) = \int \tilde{f}(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{B_{2r}(x_0)} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y) = 0.$$

Nun ist $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ also $\tilde{f} * \varphi_\varepsilon \to \tilde{f}$, $\varepsilon \to 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\rightsquigarrow \quad 0 \leq \int_{B_r(x_0)} |\tilde{f} * \varphi_\varepsilon - \tilde{f}|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f} * \varphi_\varepsilon - \tilde{f}|\,dx \to 0, \ \varepsilon \to 0$

Da $\tilde{f} * \varphi_\varepsilon = 0$ auf $B_r(x_0)$, gilt $\int_{B_r(x_0)} |\tilde{f}|\,dx = 0$

$\rightsquigarrow f = 0$ f.ü. auf $B_r(x_0)$, d.h. $\{x \in B_r(x_0) : f \neq 0\}$ ist eine Nullmenge. Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann ist $\{x \in K : f(x) \neq 0\}$ Nullmenge, da K mit endlich vielen Kugeln $B_{r_j}(x_j)$ überdeckt werden kann, wobei $B_{2r_j}(x_j) \subset \Omega$. Nun ist $\Omega = \bigcup \{K_m : m \in \mathbb{N}\}$ wobei $K_m = \{x \in \Omega : \|x\| \leq m,\ d(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{m}\}$ ist kompakt. So ist $\{x \in \Omega : f \neq 0\}$ Nullmenge. ▨

Das Lemma 3.1.6 zeigt, dass die Abbildung $L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ $f \longmapsto u_f$, injektiv ist. Wir identifizieren also $L^1_{loc}(\Omega)$ mit einem Unterraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$. Wir haben also die Inklusionen $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

(2) <u>Die δ-Distribution</u> Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Die Dirac-Distribution $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a).$$

Es ist eine Distribution von Ordnung 0, die keine Distrib. von Funktionen-Typ ist (Übung).

Wir schreiben $\delta = \delta_0$.

(3) Sei μ ein positives Borel-Maß auf Ω, so dass μ lokal endlich ist d.h. $\mu(K) < \infty$ für jedes $K \subset \Omega$ kompakt. Dann definiert μ eine Distribution $u_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$\langle u_\mu, \varphi \rangle := \int_\Omega \varphi \, d\mu$$

Dies ist eine Distribution von Ordnung 0, denn für $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$ gilt

$$|\langle u_\mu, \varphi \rangle| \leq \int_K |\varphi| \, d\mu \leq C \sup_K |\varphi|, \text{ mit } C = \mu(K).$$

u_μ ist positiv, d.h. $\langle u_\mu, \varphi\rangle \geq 0$ für $\varphi \geq 0$. Umgekehrt gilt:

Rieszcher Darstellungssatz Sei $u : \mathcal{C}_0^0(\Omega) \to \mathbb{C}$, so dass $\langle u, \varphi\rangle \geq 0$ für $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes reguläres Borel-Maß μ auf Ω mit

$$\langle u, \varphi\rangle = \int \varphi \, d\mu \ , \ \varphi \in \mathcal{C}_0^0(\Omega).$$

Das Funktional u heißt positives Radon Maß.
(siehe W. Rudin, Real and Complex Analysis, S. 40)

Ist $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ positiv, so kann man zeigen, dass $u : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ setzt sich nach $u : \mathcal{C}_0^0(\Omega) \to \mathbb{C}$ fort, also ist u ein Radon-Maß also lässt sich μ wie oben darstellen.

(4) Hauptwert von $\frac{1}{x}$. Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist nicht integrierbar auf $\mathbb{R}$, wir können jedoch eine Distribution als Hauptwert (principal value, valeur principale) assoziieren:

$$pv\left(\tfrac{1}{x}\right) : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ \left\langle pv\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx, \ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Sei $K = [-A, A] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Dann gilt

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \, dx + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \, dx$$

Definiere $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$, $x \neq 0$, $\psi(0) = \varphi'(0)$.
Dann ist ψ stetig und $\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \, dx = \int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x) \, dx \to \int_{-A}^{0} \psi(x) \, dx$
für $\varepsilon \to 0$. Somit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx = \int_{-A}^{A} \psi(x) \, dx =: \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \, dx$$

Mittelwertsatz $\rightsquigarrow$ $\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot x$, ξ zwischen $0, x$.

Es folgt $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leq x \sup\limits_K |\varphi'|$, also $|\psi(x)| \leq \sup\limits_K |\varphi'|$

$\rightsquigarrow \left|\left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq 2A \sup\limits_{[-A,A]} |\varphi'|$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$

$pv\left(\frac{1}{x}\right)$ ist also eine Distribution von Ordnung 1.

(5) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Funktion x_+^λ, gleich 0 für $x \leq 0$ und x^λ für $x>0$, ist integrierbar auf $[-A,A]$ gdw $\lambda > -1$. Können wir eine Distribution assoziieren, auch für $\lambda \leq -1$?

Es gilt
$$\int_\varepsilon^A x^\lambda d\lambda = \begin{cases} \left.\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right|_\varepsilon^A, & \lambda \neq -1 \\ \log x\big|_\varepsilon^A, & \lambda = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{A^{\lambda+1}-\varepsilon^{\lambda+1}}{\lambda+1}, & \lambda \neq -1 \\ \log A - \log\varepsilon, & 1 \end{cases}$$

Der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ existiert gdw $\lambda+1>0$ d.h. $\lambda > -1$.
Betrachten wir nun $\lambda \leq -1$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann
$$\int_\varepsilon^A x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_\varepsilon^A x^\lambda \Big(\sum_{k<N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_N\varphi(x) \Big)\,dx$$
$$= \sum_{k\leq N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_\varepsilon^A x^{\lambda+k}\,dx + \int_\varepsilon^A x^\lambda R_N\varphi(x)\,dx$$

Hier $R_N\varphi(x) = \frac{x^N}{(N-1)!}\int_0^1 (1-t)^{N-1}\varphi^{(N)}(tx)\,dt$ ist das Integralrestglied der Taylorformel. Dann gilt
$$|x^\lambda R_N\varphi(x)| \leq \frac{x^{\lambda+N}}{(N-1)!} \sup_{y\in[0,A]} |\varphi^{(N)}(y)| \cdot \int_0^1 (1-t)^N dt$$
$$= \frac{x^{\lambda+N}}{N!} \sup_{y\in[0,A]} |\varphi^{(N)}(y)|, \quad x \in [0,A].$$

Wählen wir nun N, so dass $x^{\lambda+N}$ integrierbar ist, d.h. $N \in \mathbb{N}$, $\lambda+N>-1$, also $N\in\mathbb{N}$, $N > -\lambda-1$.

So gilt $\left| \int_\varepsilon^A x^\lambda R_N\varphi(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{N!} \sup_{[0,A]} |\varphi^{(N)}| \; \frac{A^{\lambda+N+1} - \varepsilon^{\lambda+N+1}}{\lambda+N+1}$

und für $\varepsilon \to 0$, $\left| \int_0^A x^\lambda R_N\varphi(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{(N+1)!} \frac{A^{\lambda+N+1}}{\lambda+N+1} \sup_{[0,A]} |\varphi^{(N)}|$

Betrachte nun

$$\sum_{k<N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_\varepsilon^A x^{\lambda+k}\,dx = \sum_{\substack{k<N \\ \lambda+k\neq -1}} \frac{\varphi^{k}(0)}{k!} \left.\frac{x^{\lambda+k+1}}{\lambda+k+1}\right|_\varepsilon^A + \sum_{\substack{k<N \\ \lambda+k=-1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \log x \Big|_\varepsilon^A$$

Die letzte Summe enthält höchstens ein Term. Sie ist nicht leer gdw $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $k = -\lambda - 1$.

$$= \underbrace{\sum_{\substack{k<N \\ \lambda+k\neq -1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \frac{A^{\lambda+k+1}}{\lambda+k+1} + \sum_{\substack{k<N \\ \lambda+k=-1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \log A}_{\text{"Konstanter Teil" } C_N(\varphi,A)}$$

$$\underbrace{- \sum_{\substack{k<N \\ \lambda+k\neq -1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \frac{\varepsilon^{\lambda+k+1}}{\lambda+k+1} - \sum_{\substack{k<N \\ \lambda+k=-1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \log\varepsilon}_{\text{"divergenter Teil" für } \varepsilon\to 0}$$

Die Idee ist nun, den divergenten Teil zu eliminieren!

Definiere

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \sum_{\substack{k<N \\ k+\lambda\neq -1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \frac{\varepsilon^{k+\lambda+1}}{k+\lambda+1} + \sum_{\substack{k<N \\ k+\lambda=-1}} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \log\varepsilon \right]$$

$$= \int_0^A x^\lambda \Big(\varphi(x) - \sum_{k<N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \Big)\,dx + C_N(\varphi,A) + \int_A^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx$$

Die Definition hängt von A und N nicht ab. Ferner

$|\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle| \leq C \sup\{ |\varphi^{k}(x)| : x\in[-A,A], k\leq N_0 \}$,

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$, wobei $N_0 = \min\{N \in \mathbb{N} : N > -\lambda - 1\}$.

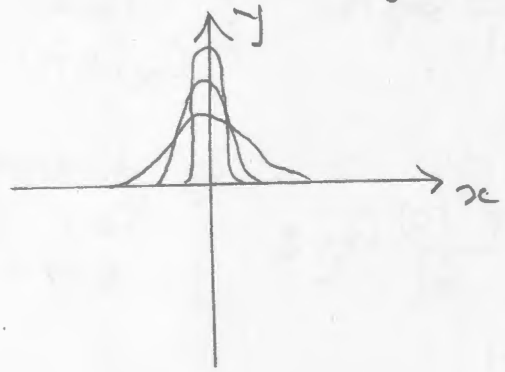
Die Distribution x_+^λ heißt Hauptteil (finite part, partie finie de Hadamard), geschrieben auch $fp(x_+^\lambda)$.

<u>3.1.7 Definition</u> Wir sagen, dass eine Folge (u_j) in $\mathcal{D}'(\Omega)$ konvergiert gegen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ falls

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle u_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle, \; j \to \infty.$$

<u>3.1.8 Beispiele</u>

(i) Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt: $\varphi_\varepsilon \to \delta$, $\varepsilon \to 0$.



Eine Folge von Distributionen, die gegen δ konvergiert, heißt <u>Dirac-Folge.</u>

19.05.2015

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\|x\|^{n-\varepsilon}} = \mathcal{K}_{n-1}\,\delta$, wobei $\mathcal{K}_{n-1} = \mathrm{vol}(S^{n-1})$.

Die Funktionen $x \longmapsto \|x\|^\lambda$, $\lambda > -n$, sind integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ (Übung), also $\|x\|^{\varepsilon - n} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Taylorformel $\rightsquigarrow$ $\varphi(x) = \varphi(0) + \sum\limits_{j=1}^n x_j \varphi_j(x)$, $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $A > 0$ mit $\mathrm{supp}\,\varphi \subset B_A(0)$.

$$\left\langle \frac{\varepsilon}{\|x\|^{n-\varepsilon}}, \varphi \right\rangle = \varepsilon \varphi(0) \int_{B_A(0)} \frac{dx}{\|x\|^{n-\varepsilon}} + \sum_{j=1}^n \varepsilon \int_{B_A(0)} \frac{x_j}{\|x\|^{n-\varepsilon}} \varphi_j(x)\,dx$$