wobei $N_0 = \min\{N \in \mathbb{N} : N > -\lambda - 1\}$.

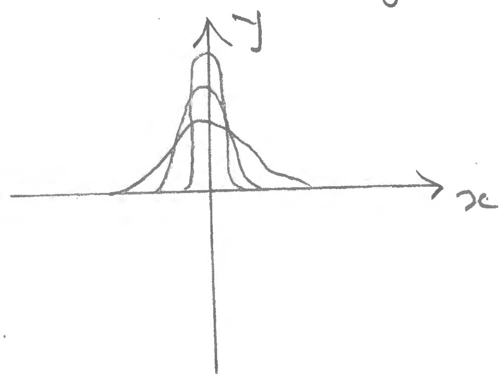
Die Distribution x_+^λ heißt Hauptteil (finite part, partie finie de Hadamard), geschrieben auch $fp(x_+^\lambda)$.

<u>3.1.7 Definition</u> Wir sagen, dass eine Folge (u_j) in $\mathcal{D}'(\Omega)$ konvergiert gegen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ falls

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle, \; j \to \infty.$$

<u>3.1.8 Beispiele</u>

(i) Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt: $\varphi_\varepsilon \to \delta$, $\varepsilon \to 0$.



Eine Folge von Distributionen, die gegen δ konvergiert, heißt <u>Dirac-Folge.</u>

19.05.2015

(ii) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\|x\|^{n-\varepsilon}} = \mathcal{K}_{n-1}\, \delta, \quad \text{wobei } \mathcal{K}_{n-1} = vol(S^{n-1}).$$

Die Funktionen $x \mapsto \|x\|^\lambda$, $\lambda > -n$, sind integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ (Übung), also $\|x\|^{\varepsilon - n} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Taylorformel $\rightsquigarrow$ $\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(x)$, $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $A > 0$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset B_A(0)$.

$$\left\langle \frac{\varepsilon}{\|x\|^{n-\varepsilon}}, \varphi \right\rangle = \varepsilon \varphi(0) \int_{B_A(0)} \frac{dx}{\|x\|^{n-\varepsilon}} + \sum_{j=1}^n \varepsilon \int_{B_A(0)} \frac{x_j}{\|x\|^{n-\varepsilon}} \varphi_j(x)\, dx$$

Integration in Polarkoordinaten und Satz von Fubini:
Ist $f: B_A(0) \to \mathbb{C}$ integrierbar, so gilt die Formel über "zwiebelweise Integration":

$$\int_{B_A(0)} f(x)\,dx = \int_0^A \left(\int_{S_r^{n-1}} f(r,\theta)\,dS(\theta) \right) dr = \int_0^A \left(\int_{S^{n-1}} f(r,\theta)\,dS(\theta) \right) r^{n-1}\,dr$$

Ist f rotationsinvariant, d.h. $f(x) = g(\|x\|) = g(r)$, so gilt

$$\int_{B_A(0)} f(x)\,dx = \mathcal{K}_{n-1} \int_0^A g(r)\,r^{n-1}\,dr$$

Für $f(x) = \|x\|^{\varepsilon-n} = r^{\varepsilon-n} \rightsquigarrow \int_{B_A(0)} \frac{\varepsilon}{\|x\|^{n-\varepsilon}}\,dx =$

$$= \mathcal{K}_{n-1}\,\varepsilon \int_0^A \frac{r^{n-1}}{r^{n-\varepsilon}}\,dr = \mathcal{K}_{n-1}\,\varepsilon \int_0^A r^{\varepsilon-1}\,dr = \mathcal{K}_{n-1}\,\varepsilon \cdot \frac{r^\varepsilon}{\varepsilon}\Big|_0^A$$

$$= \mathcal{K}_{n-1} A^\varepsilon \to \mathcal{K}_{n-1},\ \varepsilon \to 0.$$

Die Fkt $x \to \frac{x_j}{\|x\|^n}$ ist lokal integrierbar in $\mathbb{R}^n$ und

$$\frac{x_j}{\|x\|^{n-\varepsilon}} \to \frac{x_j}{\|x\|^n} \text{ f.ü. und } \frac{|x_j \varphi(x)|}{\|x\|^{n-\varepsilon}} \leq C \frac{|x_j \varphi(x)|}{\|x\|^n}$$

für alle $\varepsilon > 0$ ($C > 0$ ist eine Konstante die von suppφ abhängt; wir haben $\|x\|^{\varepsilon-n} \leq \|x\|^{-n}$ für $\|x\| \leq 1$) und das letze Funktion ist integrierbar. Nach dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz gilt

$$\int_{B_A(0)} \frac{x_j}{\|x\|^{n-\varepsilon}} \varphi_j(x)\,dx \to \int_{B_A(0)} \frac{x_j}{\|x\|^n} \varphi(x)\,dx,\ \varepsilon \to 0.$$

Wiederholung: Polarkoordinaten.

$P_n : \mathbb{R}_+ \times (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x : x_1 \le 0,\ x_2 = 0\}$

$P_n(r,\varphi,\theta_1,\dots,\theta_{n-2}) = (x_1,\dots,x_n)$ mit

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-2}\\
x_2 &= r\sin\varphi\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-2}\\
x_3 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-2}\\
x_n &= r\sin\theta_{n-2}
\end{aligned}$$

Die Jacobi-Determinante von P_n ist

$$\det J_{P_n}(r,\varphi,\theta_1,\dots,\theta_{n-2}) = r^{n-1}\cos\theta_1(\cos\theta_2)^2\cdots(\cos\theta_{n-2})^{n-2}$$

Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so gilt (Trafosatz)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(P_n(r,\varphi,\theta_1,\dots,\theta_{n-2}))\,r^{n-1}\,dr\,d\varphi\,d\theta_1\dots d\theta_{n-2}$$

Sei $S_R^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = R\}$. Für g integrierbar auf S_R^{n-1} gilt

$$\int_{S_R^{n-1}} g\,dS = R^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(P_n(R,\varphi,\theta_1,\dots,\theta_{n-2}))\,d\varphi\,d\theta_1\dots d\theta_{n-2}$$

Satz von Fubini: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty\left(\int_{S_r^{n-1}} f\,dS\right)dr = \int_0^\infty\left(\int_{S^{n-1}} f\,dS\right)r^{n-1}\,dr$$

Für eine Distribution u können wir nicht über den Wert von u in einem Punkt x_0 reden. Wir können nicht sagen, dass $\delta(x)=0$ für $x\neq 0$, da δ keine Funktion ist. Trotzdem, ist es klar, dass in einem gewissen Sinne δ ist Null auf $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Wir können tatsächlich definieren, was bedeutet, dass zwei Distributionen gleich auf eine offene Teilmenge sind.

Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U\subset\Omega$ offen. Wir sagen, dass u_1 und u_2 gleich auf U sind, wenn $\langle u_1,\varphi\rangle=\langle u_2,\varphi\rangle$ für alle $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(U)$.

<u>3.1.9 Definition</u> Der Träger einer Distribution $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ ist die Menge der Punkte in Ω, die keine offene Umgebung haben wobei u gleich Null ist. Der Träger wird mit $\operatorname{supp} u$ bezeichnet.

<u>Beispiele</u> (i) Ist $u\in\mathcal{C}^0(\Omega)$ so stimmt diese Definition mit der üblichen Definition des Trägers einer Funktion.

(ii) Sei δ die Dirac-Distribution. Dann gilt $\operatorname{supp}\delta=\{0\}$. Für $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ gilt $\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)=0$ also $\delta=0$ auf $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Außerdem, gibt es keine offene Umgb V von 0, wobei δ verschwindet. Es gibt $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(V)$ mit $\varphi(0)\neq 0$ also $\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)\neq 0$. Also $\operatorname{supp}\delta=\{0\}$.

3.2. Produkt mit glatten Funktionen und Ableitung.

Sei $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann ist $af \in L^1_{loc}(\Omega)$ und

$$\langle af, \varphi \rangle = \int_\Omega (af)\varphi \, dx = \int_\Omega f(a\varphi)\, dx = \langle f, a\varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Dies motiviert die folgende Definition:

3.2.1 Definition Sei $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Das Produkt $au : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ wird durch

(3.2.1) $\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

definiert. Dies hat Sinn, da $a\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Das Funktional au ist linear und stetig (da $\varphi_j \to \varphi \leadsto a\varphi_j \to a\varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$).

Gilt $a_j \to a$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, so gilt $a_j u \to au$ und $au_j \to au$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiele (i) $x\delta = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)(0) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) $x \cdot pv\left(\frac{1}{x}\right) = 1$: Für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle x\, pv\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \langle pv\left(\tfrac{1}{x}\right), x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Wir merken, dass die Gleichung $xu = 1$ keine eindeutige Lsg in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ hat, da $u = pv\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta$ ist eine Lsg für jedes $C \in \mathbb{C}$.

Man kann kein assoziatives Produkt der Distributionen definieren, das auch das Produkt (3.2.1) fortsetzt:

$$(\delta \cdot x)\, pv\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0 \cdot pv\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{aber}$$

$$\delta\left(x \cdot pv\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = \delta \cdot 1 = \delta.$$

Die Formel (3.1.4), $\int \partial^\alpha f \cdot g\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int f\, \partial^\alpha g\, dx$ für $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}^1_0(\Omega)$ motiviert die folgende Definition.

3.2.2 Definition Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Die Ableitung $\partial^\alpha u$ von u ist die Distribution

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Beispiel Sei $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Diese Fkt ist nicht differenzierbar, nicht einmal stetig. Trotzdem ist $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, also H definiert ein Element $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und die Ableitung H' im Sinne von Distributionen erfüllt $H' = \delta$. Für $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle H', \varphi \rangle := -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Bemerkung (a) Jede Distribution ist beliebig oft diffbar!

(b) Die Reihenfolge der Ableitungen spielt keine Rolle:

$$\langle \partial_i \partial_j u, \varphi \rangle = \langle u, \partial_j \partial_i \varphi \rangle = \langle u, \partial_i \partial_j \varphi \rangle = \langle \partial_j \partial_i u, \varphi \rangle$$

(c) $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ ist stetig

(d) Die Leibniz-Regel gilt: $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightsquigarrow$

$$\partial_j(au) = \partial_j a \cdot u + a \cdot \partial_j u.$$

(e) Sei $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$ und $f = \partial^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Dann gilt $\partial^\alpha u = f$ auch in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (wende (3.1.4) an). Umgekehrt, ist $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ und $\partial^\alpha u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, so gilt $\partial^\alpha u = f$ auch in klassischen Sinne.

3.2.3 Definition Sei $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ein DO mit konstanten Koeffizienten. Eine Distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt Fundamentallösung von $P(\partial)$, falls $P(\partial)E = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

21.05.2015

3.2.4 Beispiel Sei

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\mathcal{K}_{n-1}} \cdot \frac{1}{\|x\|^{n-2}} & , n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log|x| & , n = 2 \end{cases}$$

Dann ist $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta E = \delta$.

Sei $n \geq 3$. Dann gilt für $x \neq 0$ und $\varepsilon > 0$:

$$\Delta\left(\frac{1}{\|x\|^{n-2-\varepsilon}}\right) = -\varepsilon(n-2-\varepsilon)\frac{1}{\|x\|^{n-\varepsilon}}$$

Die Funktion $\frac{1}{\|x\|^\lambda}$ ist in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für $\lambda < n$. Also gilt diese Gleichung auch in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Die Ableitung ist stetig, also durch $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$\Delta\left(\frac{1}{\|x\|^{n-2}}\right) = -(n-2)\mathcal{K}_{n-1}\,\delta.$$

Sei $n=2$. Für $\varepsilon > 0$ gilt in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$:

$$\underbrace{\Delta\left(\|x\|^\varepsilon \log\|x\|\right)}_{\to \Delta(\log\|x\|)} = \underbrace{\varepsilon(1+\varepsilon\log\|x\|)\|x\|^{\varepsilon-2}}_{\to 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)} + \underbrace{\varepsilon\|x\|^{\varepsilon-2}}_{\to \delta}$$

Sei $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ein DO.

Seien $u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann gilt:

$P(x,\partial)u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ $\langle f, \varphi\rangle = \langle P(x,\partial)u, \varphi\rangle$

$= \left\langle \sum a_\alpha(x)\partial^\alpha u, \varphi\right\rangle = \sum (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha(a_\alpha\varphi)\rangle$

$= \langle u, {}^tP(x,\partial)\varphi\rangle$, wobei ${}^tP(x,\partial)\varphi = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\varphi)$.

${}^tP(x,\partial)$ heißt die formel adjungierte Operator zu $P(x,\partial)$. Falls $P(x,\partial) = {}^tP(x,\partial)$, so heißt $P(x,\partial)$ formel selbstadjungiert. Der Laplace-Operator erfüllt ${}^t\Delta = \Delta$.

Seien $u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Gilt $P(x,\partial)u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, so heißt u eine Lösung im Sinne der Distributionen der PDG $P(x,\partial)u = f$.
Sind $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ und gilt $P(x,\partial)u = f$, so heißt u klassische Lösung der PDG $P(x,\partial)u = f$.

Um die PDG $P(x,\partial)u = f$ zu lösen, verfahren wir oft so:

- Finde eine Lösung in $\mathcal{D}'$ (Existenzsätze; man benutzt Hilbertraummethoden, Fundamentallösungen usw).
- Ist f regulär, z.B. $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, so zeigt man, dass auch u regulär ist d.h. $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$. (Regularitätssätze).

Wir haben nun $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ und $P(x,\partial)u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Daraus folgt, dass u auch klassische Lösung ist: Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightsquigarrow$

$$\int f\varphi\, dx = \langle f, \varphi \rangle = \langle P(x,\partial)u, \varphi \rangle = \langle u, {}^tP(x,\partial)\varphi \rangle$$

$$= \int u\, {}^tP(x,\partial)\varphi\, dx \underset{\text{partielle Integration}}{=} \int P(x,\partial)u \cdot \varphi\, dx$$

Lemma 3.1.6 $\rightsquigarrow P(x,\partial)u = f$ f.ü. d.h. auf $\Omega \setminus N$, wobei N Nullmenge. Da $\Omega \setminus N$ dicht in Ω liegt, $P(x,\partial)u, f$ sind stetig $\Longrightarrow P(x,\partial)u = f$ überall in Ω.

$\boxed{\text{Zur } \Delta E = \delta}$

Suchen $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\Delta E = \delta$. Insb. $\Delta E = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, E ist also harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Wir suchen nun E rotationsinvariant, $E(x) = G(\|x\|) = G(r)$, $G : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\Delta E(x) = G''(r) + \frac{n-1}{r} G'(r)$$

also $G''(r) + \frac{n-1}{r} G'(r) = 0$, $r > 0$. Die Lösung ist

$$G(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 r^{2-n}, & n \geq 3 \\ c_1 + c_2 \log r, & n = 2. \end{cases}$$

Wir bestimmen nun c_2 so dass $\Delta E = \delta$.

$n=3$: Berechne $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\left\langle \Delta\left(\tfrac{1}{r}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{r}, \Delta\varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta\varphi = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{r \geq \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r}$$

Green-Formel:

$$\int_\Omega (u \Delta v - v \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega$ der Klasse $\mathcal{C}^1$, n ist die äußere Normale, $u, v \in \mathcal{C}^2_0(\overline{\Omega})$.

$$\rightsquigarrow \int_{r \geq \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r} = \underbrace{\int_{r \geq \varepsilon} \varphi \Delta\left(\tfrac{1}{r}\right)}_{=0} + \underbrace{\int_{r=\varepsilon} \varphi \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial r}\left(\tfrac{1}{r}\right)}_{= -\frac{1}{r^2}} ds}_{\to -4\pi\varphi(0),\ \varepsilon \to 0} - \underbrace{\int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} ds}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0}$$

$$\int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \varepsilon^2 \cos\theta \, d\varphi\, d\theta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

$$\varepsilon^{-2}\int_{r=\varepsilon}\varphi\, dS = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\varepsilon,\varphi,\theta)\cos\theta\, d\varphi\, d\theta \Rightarrow \varphi(0)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \varphi(0)\operatorname{vol}(S^2) = 4\pi\,\varphi(0).$$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\cos\theta & \varphi\in(-\pi,\pi) \\ x_2 = r\sin\varphi\cos\theta & \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ x_3 = r\sin\theta & r\in[0,\infty) \end{cases}$$

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$dx_1\,dx_2\,dx_3 = r^2\cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta, \quad dS_r = r^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta$$

Schließlich $\langle \Delta(\frac{1}{r}),\varphi\rangle = -4\pi\varphi(0) = \langle -4\pi\delta,\varphi\rangle$

also $\boxed{\Delta\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\right) = \delta.}$ für $n=3$.

3.3 Die Faltung

Seien $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$. Das Tensorprodukt von f, g ist die Funktion $f \otimes g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, $(f \otimes g)(x,y) = f(x) g(y)$. Dann $f \otimes g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+m})$ und $f \otimes g$ wirkt folgendermaßen als Distribution:

$$\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x) g(y) \varphi(x,y)\, dx\, dy \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(y) \varphi(x,y)\, dy \right) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x,y)\, dx \right) g(y)\, dy$$

also $\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle =$
$= \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$. In der Tat $x \mapsto \langle g(\cdot), \varphi(x, \cdot) \rangle \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ und diese Schreibweise hat Sinn.

3.3.1 Definition Seien $u \in \mathcal{D}'(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $v \in \mathcal{D}'(V)$, $V \subset \mathbb{R}^m$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Distribution $u \otimes v \in \mathcal{D}'(U \times V)$ so dass

$$\langle u \otimes v, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \langle v, \psi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(U), \psi \in \mathcal{D}(V)$$

Beweis Existenz: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(U \times V)$. Die Abbildung $\Psi : V \to \mathbb{C}$, $\Psi(y) = \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle$ ist in $\mathcal{D}(V)$ und die Abbildung $\varphi \mapsto \Psi$ ist stetig von $\mathcal{D}(U \times V) \to \mathcal{D}(V)$.
Wir setzen dann $\langle u \otimes v, \varphi \rangle = \langle v, \Psi \rangle = \langle v(y), \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$.
Eindeutigkeit: $\mathcal{D}(U) \otimes \mathcal{D}(V)$ liegt dicht in $\mathcal{D}(U \times V)$. ∎

Seien nun $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Betrachte $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $h(x,y) = f(x-y)\, g(y)$. Satz von Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |h(x,y)|\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx \Big) |g(y)|\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \Big) |g(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy < \infty.$$

Es folgt, dass $h \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Nach dem Satz von Fubini existiert $\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\, dy$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Setze
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Fubini sichert auch, dass $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, Faltung von f und g.

Wie wirkt $f * g$ als Distribution: Für $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int \Big(\int f(x-y)\, g(y)\, dy \Big) \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int \Big(\int f(x-y)\, \varphi(x)\, dx \Big) g(y)\, dy = \int \Big(\int f(z)\, \varphi(z+y)\, dz \Big) g(y)\, dy$$

$$= \int\int f(z)\, g(y)\, \varphi(y+z)\, dz\, dy = \int (f \otimes g)(z,y)\, \varphi(y+z)\, dz\, dy$$

$$= \int (f \otimes g)(z,y)\, \tilde{\varphi}(z,y)\, dz\, dy$$

wobei $\tilde{\varphi}(z,y) := \varphi(z+y)$. Beachte, dass $\tilde{\varphi}$ hat i.A. kein kompakten Träger, auch wenn $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: Falls $\tilde{\varphi}(z,y) \neq 0$ so auch $\tilde{\varphi}(z+w, y-w) = \varphi(z,w) \neq 0$ für w beliebig groß. Wir können nicht schreiben

$$\int (f \otimes g)\, \tilde{\varphi}\, dz\, dy = \langle f \otimes g, \tilde{\varphi} \rangle \quad \text{da } \tilde{\varphi} \notin \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

Wenn aber f, g kompakten Träger haben, so ist $\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g = K \subset \mathbb{R}^{2n}$ kompakt. Wähle $\chi = \chi(z,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\chi = 1$ auf K. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \otimes g)\tilde{\varphi}\, dz dy = \int_{\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g} (f \otimes g)\tilde{\varphi}\, dz dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \otimes g) \underbrace{\chi \tilde{\varphi}}_{\in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})} dz dy$$

$= \langle f \otimes g, \chi \tilde{\varphi} \rangle$ im Sinne der Distributionen.

Bemerkung Dieser Trick funktioniert im Allgemeinen für eine Distribution $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompakten Träger in Ω. Wähle $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ auf $\operatorname{supp} u$.

Für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ setze $\langle w, \varphi \rangle := \langle w, \underbrace{\chi \varphi}_{\in \mathcal{C}_0^\infty} \rangle$

Diese Definition hängt von χ nicht ab.

Das Funktional $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$, $\varphi \to \langle u, \varphi \rangle$ ist stetig, also Distributionen mit kompakten Träger definieren stetige Funktionale auf $\mathcal{E}(\Omega)$ also Elemente aus der Dualraum $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Man kann umgekehrt zeigen, dass jedes Element $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ definiert durch Restriktion $u|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ eine Distribution mit kompakten Träger.

3.3.2 Definition Seien $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Wir nehmen an, dass u, v kompakten Träger haben. Setze $\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u \otimes v, \tilde{\varphi} \rangle = \langle u \otimes v, \chi \tilde{\varphi} \rangle$ ($\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\chi = 1$ auf $\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$). Dann ist $u * v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und heißt Faltung von u mit v.