Satz 3.3.3 Seien $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompakten Träger. Dann gilt:

(a) $\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v := \{x+y : x \in \operatorname{supp} u, y \in \operatorname{supp} v\}$

(b) $u * v = v * u$

(c) $\partial^\alpha v = \delta * \partial^\alpha v = \partial^\alpha \delta * v$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$

(d) $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$

Beweis (a) Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \cap (\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v) = \emptyset$ so gilt $\operatorname{supp}\tilde{\varphi} \cap (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v) = \emptyset$ also $\langle u \otimes v, \tilde{\varphi} \rangle = 0$ und $\langle u * v, \varphi \rangle = 0$.

(b) $\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u(x) \otimes v(y), \chi(x,y)\varphi(x+y) \rangle$
$= \langle v(y) \otimes u(x), \chi(x,y)\varphi(x+y) \rangle = \langle v * u, \varphi \rangle$.

(c) $\langle \partial^\alpha \delta * v, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha \delta(x) \otimes v(y), \chi(x,y)\varphi(x+y) \rangle$
$= \langle v(y), \langle \partial^\alpha \delta(x), \chi(x,y)\varphi(x+y) \rangle\rangle =$
$= \langle v(y), \langle \delta(x), \partial^\alpha_x (\chi(x,y)\varphi(x+y)) \rangle\rangle (-1)^{|\alpha|}$
$= \langle v(y), \langle \delta(x), \partial^\alpha \varphi(x+y) \rangle\rangle (-1)^{|\alpha|}$
$= \langle v(y), \partial^\alpha \varphi(y) (-1)^{|\alpha|} \rangle$
$= \langle \partial^\alpha v, \varphi \rangle$

Hier benutzen wir die Tatsache, dass $\chi = 1$ in der Umgebung von $(\{0\} \times \operatorname{supp} v) \cap \operatorname{supp}\tilde{\varphi}$.

Insbesondere gilt $\delta * v = v$, also $\delta * \partial^\alpha v = \partial^\alpha v$.

(d) $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha \delta * (u * v) = (\partial^\alpha \delta * u) * v =$
$= \partial^\alpha u * v$

Nach (b) gilt auch $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha(v * u) = \partial^\alpha v * u = u * \partial^\alpha v$.

Hier haben wir die Assoziativität benutzt:
Sind $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompakten Träger, so ist
$$u * (v * w) = (u * v) * w$$
Beide sind gleich $u * v * w$, wobei
$\langle u * v * w, \varphi \rangle := \langle u \otimes v \otimes w, \chi\tilde{\varphi} \rangle$
mit $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\chi = 1$ in der Nähe von $\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v \times \operatorname{supp} w$ und $\tilde{\varphi}(x,y,z) = \varphi(x+y+z)$.

<u>Bemerkung 3.3.4</u> Wir können die Faltung für eine größere Klasse von Distributionen definieren, nicht nur für Distributionen mit kompakten Träger.
Wichtig ist, dass $\operatorname{supp}(u \otimes v) \cap \operatorname{supp} \tilde{\varphi}$ kompakt ist.
Wir sagen, dass die Träger der Distributionen u, v <u>angepasst</u> sind, falls

(*) $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt: $M_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v,\ x+y \in K\}$
ist kompakt in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\chi = 1$ auf M_K. Setze

$$\langle u * v, \varphi \rangle := \langle u \otimes v, \underbrace{\chi \tilde{\varphi}}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $u * v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Ist u beliebig und v mit kompaktem Träger, so gilt (*) also existiert $u * v$.
Satz 3.3.3 ist richtig auch wenn die Träger von u, v angepasst sind.

<u>Satz 3.3.5</u> Sei $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Fundamentallösung eines Differentialoperators $P(\partial)$ mit konstanten Koeffizienten. Sei $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und die Träger von E und f seien angepasst. Dann ist $u = E * f$ eine Lösung der Gleichung $P(\partial)u = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Beweis</u> Sei $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha$.

$$P(\partial)(E * f) = \sum a_\alpha \partial^\alpha (E * f) = \sum a_\alpha (\partial^\alpha E) * f$$
$$= \left(\sum a_\alpha \partial^\alpha E\right) * f = \delta * f = f \qquad \blacksquare$$

Beispiel 3.3.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt.
Sei $f \in L^1(\Omega)$. Wir suchen eine Lösung der Gleichung $\Delta u = f$. Dafür benutzen wir den Satz 3.3.5.
Definiere zunächst

$$\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \tilde{f} = \begin{cases} f & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

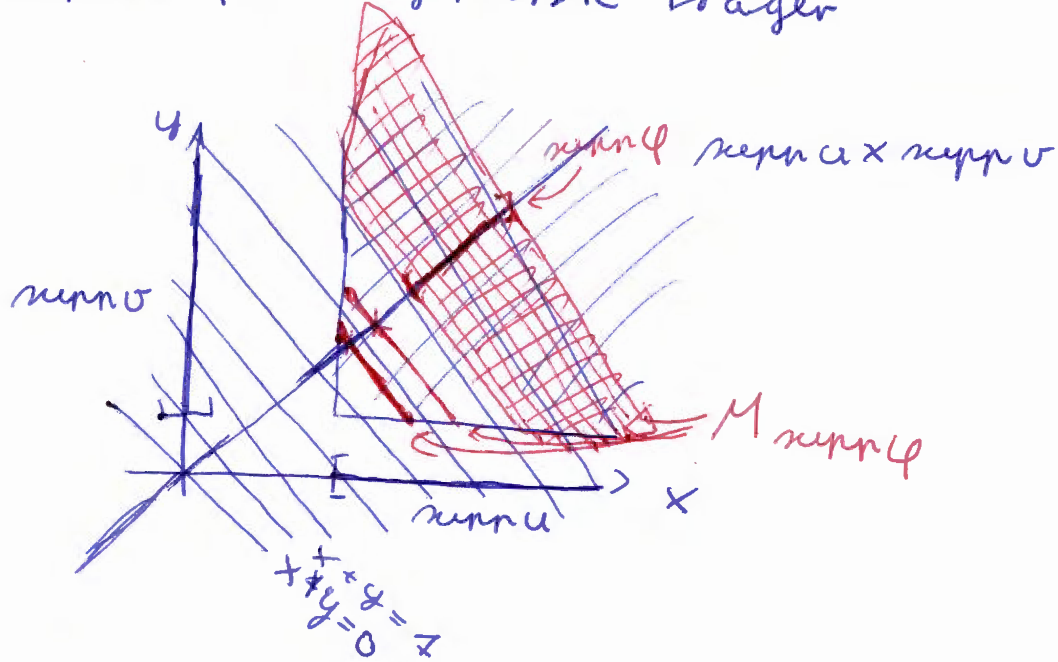
$\tilde{f}$ hat kompakten Träger. Sei E die Fundamentallösung des Laplace-Operators (Beispiel 3.2.4).
Definiere $u = E * \tilde{f}$. Dann gilt $\Delta u = \tilde{f}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ also $\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Beachte, dass $u = E * \tilde{f}$ eine Distribution von Funktion-Typ ist:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\tilde{f}(y)\,dy = \int_{\Omega} E(x-y) f(y)\,dy$$

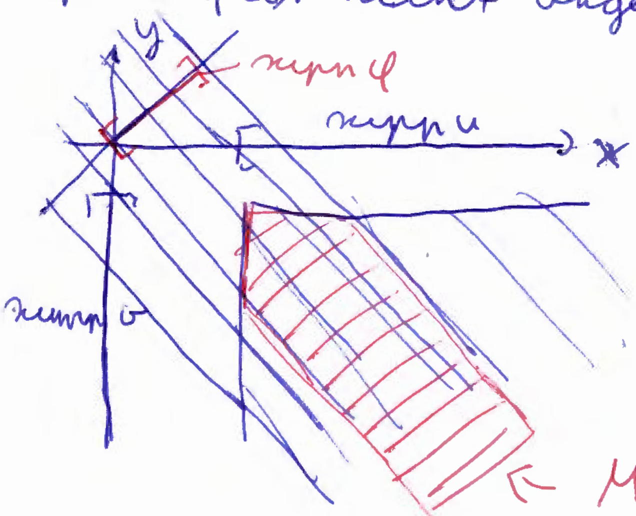
Dann ist $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Wir können zeigen: $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega) \leadsto u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (Differentiation unter Integralzeichen), also ist $\Delta u = f$ in klassischen Sinne.

Beispiel für angepasste Träger

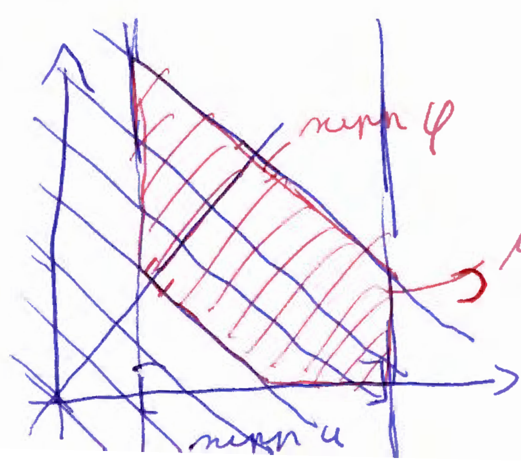


Beispiel für nicht angepasste Träger:



$M_{\text{supp}\,\varphi}$ unbeschränkt & somit nicht kompakt

supp u kompakt:



$M_{\text{supp}\,\varphi}$ und somit immer kompakt, egal was der Träger von v ist