Die Faltung wird oft benutzt um Distributionen zu regularisieren.

3.3.7 Satz Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ und für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $u_\varepsilon := u * \varphi_\varepsilon$. Dann gilt $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

(a) $u_\varepsilon \to u$, $\varepsilon \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

(b) Ist $u \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$, so gilt $u_\varepsilon \to u$, $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig.

(c) Ist $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, so gilt $u_\varepsilon \to u$, $\varepsilon \to 0$, in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung u_ε heißt die Regularisierung von u. Der Satz zeigt, dass $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ liegt. Mit Hilfe einer Zerlegung der Eins kann man zeigen, dass $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathcal{D}'(\Omega)$ liegt, für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Analog für $L^p(\mathbb{R}^n)$ und $L^p(\Omega)$.

Beweis (a) Wissen schon, dass $\varphi_\varepsilon \to \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und die Träger der Funktionen φ_ε sind alle in eine feste Umgb der Null enthalten. Dann gilt

$$u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon \to u * \delta = u \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

(b) folgt wie in der Vorlesung am 05.05.2015.

(c) Übung: Benutze (b) und zeige, dass $\|u_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$ für alle $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. ∎

3.3.8 Bemerkung Ist $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so ist $u * g$ gegeben durch die Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$f(x) = \langle u(y), g(x-y) \rangle.$$

(Siehe Blatt 10, 4(b).)

3.4. Die Fouriertransformation

3.4.1. Definition Die Fourier-Transformierte einer Fkt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Funktion $\hat{f} = \mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx$$

3.4.2 Satz Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{f}$ stetig, $\lim\limits_{\xi \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$ und $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$.

Beweis Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Parameterabhängigen Integrale: die Funktion $\xi \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle} f(x)$ ist stetig für alle x und ist durch $|f(x)|$ dominiert. Da $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt die Stetigkeit von $\hat{f}$.

Nun gilt $|\hat{f}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx$.

Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt (partielle Integration):

$$\int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \partial_j^2 \varphi(x)\,dx = \int \partial_j^2 \left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right) \varphi(x)\,dx$$

$$= i^2 \xi_j^2 \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \varphi(x)\,dx = -\xi_j^2\, \hat{\varphi}(\xi)$$

$$\rightsquigarrow \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-\Delta\varphi)(x)\,dx = \|\xi\|^2\, \hat{\varphi}(\xi)$$

also $\|\xi\|^2 |\hat{\varphi}(\xi)| \le \|\Delta\varphi\|_{L^1}$, also $\lim\limits_{\|\xi\| \to 0} |\hat{\varphi}(\xi)| = 0$.

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - \varphi\|_{L^1} \le 1$.

Dann ist $|\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}_j(\xi)| \le 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Also $\lim\limits_{\|\xi\| \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$ auch. $\blacksquare$

Eine wichtige Eigenschaft der Fourier-Transformation ist, dass sie Ableitungen in Multiplikation mit Polynome überführt: Sei $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = i^{|\alpha|} \widehat{(-x)^\alpha f}, \quad \xi^\beta \hat{f}(\xi) = i^{-|\beta|} \widehat{\partial_x^\beta f}$$

Insgesamt $\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = i^{|\alpha|-|\beta|} \widehat{\partial_x^\beta((-x)^\alpha f)}$ also

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| \le \| \partial_x^\beta((-x)^\alpha f)\|_{L^1} < \infty.$$

<u>3.4.3 Definition</u> (Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen) Setze

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \right\}$$

Diese Fkten sind unendlich oft diffbar und sie und ihre Ableitungen streben in Unendlichen gegen Null schneller als jedes Inverses eines Polynoms.

<u>3.4.4 Beispiele</u> (a) $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow \varphi, \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Ist $a \neq 0$, so ist $e^{-a^2x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Wir sagen, dass eine Folge (φ_j) konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen $\varphi \in \mathcal{S}$ falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\lim_{j \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha (\varphi_j - \varphi)(x)| = 0 \quad (\rightsquigarrow \mathcal{S} \text{ ist ein Fréchetraum})$$

<u>3.4.5. Elementare Eigenschaften</u>

(a) Ist $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$, so auch $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$, $j \to \infty$.

(b) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (stetige Inklusionen).

(c) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(d) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightsquigarrow f \otimes g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(e) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(f) Sei $\mathcal{L} = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \; \exists p \in \mathbb{N} : \sup (1+\|x\|)^{-p} |\partial^\alpha a(x)| < \infty\}$ der Raum der langsam wachsenden Funktionen.

Ist $a \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathcal{S}$ so ist $a\varphi \in \mathcal{S}$ und die Abbildung $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\varphi \mapsto a\varphi$ ist stetig (d.h. $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ impliziert $a\varphi_j \to a\varphi$ in $\mathcal{S}$).

3.4.6 Bemerkung Für Fkten aus $\mathcal{S}$ gilt die Formel der partiellen Integration:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \varphi \cdot \psi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, \partial^\alpha \psi \, dx$$

Man wendet die Teilintegration auf $B_R(0)$:

$$\int_{B_R(0)} \partial_j \varphi \cdot \psi \, dx = - \int_{B_R(0)} \varphi \, \partial_j \psi + \int_{S_R(0)} \varphi \psi \, \nu_j \, ds$$

wobei $S_R(0) = \{x : \|x\| = R\}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Es gilt

$$\left| \int_{S_R(0)} \varphi \psi \, \nu_j \, ds \right| \leq \sup_{S_R(0)} |\varphi \psi| \cdot \mathrm{vol}\, S_R(0)$$

und $\mathrm{vol}\, S_R(0) = \varkappa_{n-1} R^{n-1}$, $\varkappa_{n-1} = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ ist das Volumen der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$.

Es gibt $C > 0$ mit $|\varphi(x)\psi(x)| \leq C \|x\|^{-n}$ $(x \neq 0)$ also konvergiert das Randintegral gegen 0 für $R \to \infty$. ∎

Es ist zweckmäßig die folgenden modifizierten Ableitungsoperatoren zu benutzen:

$$D_j = \frac{1}{i} \partial_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{wobei } i = \sqrt{-1}$$

Dann gilt $D_\xi^\alpha e^{-i\langle x,\xi\rangle} = (-x)^\alpha e^{-i\langle x,\xi\rangle}$.

<u>3.4.7 Satz</u> (a) $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist stetig

(b) $\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$, $\varphi \in \mathcal{S}$

(c) $\widehat{x^\alpha\varphi}(\xi) = (-D)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$, $\varphi \in \mathcal{S}$

(d) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightsquigarrow \widehat{f \otimes g} = \hat{f} \otimes \hat{g}$.

<u>Beweis</u> (b)&(c): Falls $\varphi \in \mathcal{S}$, so $x^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, also $x^\alpha\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir können also unter Integralzeichen ableiten in der Def der Fourier-Transformierte und erhalten

$$D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x)^\alpha \varphi(x)\, dx$$

Dies beweist, dass $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und (c).

Ferner ergibt sich durch partielle Integration:

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (-1)^{|\beta|} \int D_x^\beta \left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right) (-x)^\alpha \varphi(x)\, dx$$

$$= \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha \varphi(x)\right) dx.$$

Für $\alpha = 0$ folgt (b). Es gilt weiter

$$\sup_\xi |\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \leq \sup_x (1+\|x\|^2)^n \left|D^\beta\left((-x)^\alpha \varphi(x)\right)\right| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^{-n}\, dx$$

wobei das letze Integral eine Konstante ist. Also ist $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ und $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist stetig. Ausserdem

$$\widehat{(f \otimes g)}(\xi,\eta) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} e^{-i\langle y,\eta\rangle} f(x) g(y)\, dx\, dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \hat{f} \otimes \hat{g}\,(\xi,\eta).$$

3.4.8 Beispiel: Fourier-Transformierte von $e^{-a^2\|x\|^2}$

Sei $a \neq 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-a^2 x^2}$. Dann gilt

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4a^2}\|\xi\|^2}$$

Es reicht, den Fall $n = 1$ zu betrachten:

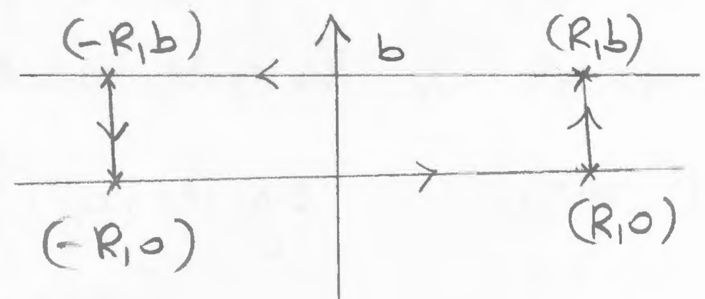
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - a^2x^2}\,dx \underset{|a|x=y}{=} \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\frac{\xi}{a} - y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{|a|} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y + i\frac{\xi}{2a}\right)^2} dy = \frac{1}{|a|} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} \int_{\operatorname{Im} z = \frac{\xi}{2a}} e^{-z^2}\,dz$$

wobei $z = y + i\eta$. Wir zeigen, dass

(*) $$\int_{\operatorname{Im} z = b} e^{-z^2}\,dz = \int_{\operatorname{Im} z = 0} e^{-z^2}\,dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}.$$

Nun ist $z \mapsto e^{-z^2}$ holomorph in $\mathbb{C}$, also $\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz = 0$ nach dem Integralsatz von Cauchy, wobei Γ der Rechteck mit Ecken $(R,0), (R,b), (-R,b), (-R,0)$ ist:



also

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy + i\int_0^b e^{-(R+i\eta)^2}\,d\eta + \int_R^{-R} e^{-(y+ib)^2}\,dy + i\int_b^0 e^{-(-R+i\eta)^2}\,d\eta$$

Aber $\left|e^{-(\pm R + i\eta)^2}\right| = e^{-R^2+\eta^2} \leq e^{b^2 - R^2}$, $\eta \in [0,b]$

Die beiden Integrale in η streben gegen Null für $R \to \infty$.
Wir lassen $R \to \infty$ und (*) folgt. ▨

<u>3.4.9 Satz</u> (Fourier-Inversionsformel)
$\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{S}$ und für $\psi \in \mathcal{S}$,

$$(3.4.1) \quad (\mathcal{F}^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(\xi)\, d\xi .$$

<u>Beweis</u> Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$:

$$\int \hat{\varphi}(\xi)\psi(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi = \iint \varphi(y)\psi(\xi) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} dy\, d\xi$$

$$= \int \varphi(y) \int \psi(\xi) e^{-i\langle y-x,\xi\rangle} d\xi\, dy = \int \hat{\psi}(y-x)\varphi(y)\, dy$$

$$= \int \hat{\psi}(z)\,\varphi(x+z)\, dz \qquad (3.4.2)$$

Wir ersetzen nun $\psi(\xi)$ durch $\psi_\varepsilon(z) = \psi(\varepsilon z)$, $\varepsilon > 0$ und

$$\hat{\psi}_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n} \hat{\psi}(z/\varepsilon) \rightsquigarrow$$

$$\int \hat{\varphi}(\xi)\psi(\varepsilon z) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi = \int \hat{\psi}(z)\varphi(x+\varepsilon z)\, dz$$

Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue $\rightsquigarrow$
Für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\psi(0) \int \hat{\varphi}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi = \varphi(x) \int \hat{\psi}(z)\, dz$$

Wähle $\psi(z) = e^{-\|x\|^2/2} \rightsquigarrow \hat{\psi}(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\|z\|^2/2}$

und $\int \hat{\psi}(z)\, dz = (2\pi)^n \rightsquigarrow$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

also $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathrm{Id}$. ▨

Wenn wir $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ schreiben, so lautet die Inversionsformel $\mathcal{F}^{-1}\psi = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\tilde{\psi}$ und insbesondere $\hat{\hat{\psi}} = (2\pi)^n \tilde{\psi}$ durch Anwendung von $\mathcal{F}$ auf beiden Seiten.

<u>3.4.10 Satz</u> Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, so gilt

(a) $\int \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx = \int \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx$

(b) $\int \varphi\overline{\psi}\,dx = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}\,\overline{\hat{\psi}}\,dx$ (Parseval-Formel)

(c) $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\psi}$

(d) $\widehat{\varphi\cdot\psi} = (2\pi)^{-n}\,\hat{\varphi} * \hat{\psi}$.

16.06.2015

<u>Beweis</u> (a) folgt aus (3.4.1) für $x = 0$.

(b) Sei $\chi = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{\psi}} \rightsquigarrow$

$$\hat{\chi}(x) = (2\pi)^{-n}\int \overline{\hat{\psi}}(\xi)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi$$

$$\rightsquigarrow \overline{\hat{\chi}(x)} = (2\pi)^{-n}\int \hat{\psi}(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi \underset{(3.4.1)}{=} \psi(x)$$

Wende nun (a) für ψ ersetzt durch χ.

(c) Direckte Rechnung wie für (3.4.2).

(d) $\widehat{\widehat{\varphi\psi}} = (2\pi)^n\,\tilde{\varphi}\,\tilde{\psi}$ und nach (c), $\widehat{\hat{\varphi} * \hat{\psi}} = (2\pi)^n\,\tilde{\varphi}\,\tilde{\psi}$.

<u>3.4.11 Definition</u> Ein lineares stetiges Funktional $u: \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ heißt <u>temperierte Distribution</u>. Der Raum dieser Distributionen wird $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Ein lineares Funktional $u: \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ ist in $\mathcal{S}'$ falls für jede Folge (φ_j) in $\mathcal{S}$ mit $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ gilt

$$\langle u, \varphi_j\rangle \to \langle u, \varphi\rangle.$$

Wie im Satz 3.1.4 zeigt man:

$$u \in \mathcal{S}' \Leftrightarrow \exists C>0\ \exists p,q \in \mathbb{N}: |\langle u,\varphi\rangle| \le C \sup_{\substack{|\alpha|\le p\\ |\beta|\le q\\ \mathbb{R}^n}} |x^\beta \partial^\alpha \varphi|, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

3.4.12 Beispiele

(a) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ so dass $\exists m \in \mathbb{R}$ mit $(1+\|x\|)^{-m} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Dann ist $\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \int f\varphi = \langle f,\varphi\rangle \in \mathbb{C}$ in $\mathcal{S}'$.

Insbesondere $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'$ für $p \ge 1$.

(b) $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3.4.13 Definition Sei $u \in \mathcal{S}'$. Die Fourier-Transformierte $\hat{u} = \mathcal{F}u$ von u ist durch

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

definiert. Der Satz 3.4.7 zeigt, dass $\hat{u} \in \mathcal{S}'$.

3.4.14 Satz Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist ein Isomorphismus von (topologischen) Vektorräume. Sein Inverses ist durch

$$\langle \mathcal{F}^{-1}u, \varphi\rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

gegeben.

Definieren wir nun die stetige Abbildung $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $u \mapsto \tilde{u}$ durch $\langle \tilde{u}, \varphi\rangle = \langle u, \tilde{\varphi}\rangle$. Dann gilt $\mathcal{F}^{-1}u = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\tilde{u}$ und $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \tilde{u}$.

3.4.15 Beispiele (a) $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ also $\hat{\delta} \in \mathcal{S}'$,

$\langle \hat{\delta}, \varphi\rangle = \langle \delta, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi\, dx = \langle 1, \varphi\rangle \Rightarrow \hat{\delta} = 1$.

(b) $\hat{\hat{\delta}} = (2\pi)^n \tilde{\delta} = (2\pi)^n \delta$ also $\hat{1} = \hat{\hat{\delta}} = (2\pi)^n \delta$.

(c) $f(x) = e^{ix^2/2}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

f genügt die Gleichung $f' - ixf = 0 \rightsquigarrow \widehat{f'} - \widehat{ixf} = 0$

$\rightsquigarrow \hat{f}' + i\xi\hat{f} = 0 \rightsquigarrow \hat{f}(\xi) = Ce^{-i\xi^2/2} = C\bar{f}$

Um C zu bestimmen, sei $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ und schreibe

$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle = \sqrt{2\pi} \langle f, \varphi \rangle$ also $C \langle \bar{f}, \varphi \rangle = \sqrt{2\pi} \langle f, \varphi \rangle$

Berechne nun $\langle \bar{f}, \varphi \rangle \rightsquigarrow C = (2\pi i)^{1/2} = \sqrt{2\pi}\, e^{\pi i/4}$

$$\rightsquigarrow \widehat{e^{ix^2/2}} = \sqrt{2\pi}\, e^{\pi i/4} e^{-i\xi^2/2}.$$

3.5. Hypoelliptische Operatoren

<u>3.5.1 Definition</u> Ein Diffop $P(x, \partial)$ auf Ω heißt <u>hypoelliptisch</u> wenn $\forall\, U \subset \Omega$ offen $\forall\, u \in \mathcal{D}'(U)$ mit $P(x,\partial)u \in \mathcal{C}^\infty(U)$: $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

<u>3.5.2 Satz (Schwartz)</u> Sei $P(\partial)$ ein Diffop mit konst. Koeff. Dann gilt: $P(\partial)$ ist hypoelliptisch $\Leftrightarrow$ $P(\partial)$ hat eine Fundamentallösung E mit $E|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

<u>Beweis</u> „$\Rightarrow$" $P(\partial)E = \delta \rightsquigarrow P(D)E = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow E|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

„$\Leftarrow$" Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{D}'(U)$ mit $P(\partial)u \in \mathcal{C}^\infty$.

Sei $x_0 \in U$. Wir zeigen, dass u glatt in der Umgb von x_0 ist.

Wähle $0 < r_0 < r_1$, so dass $\overline{B_{r_1}(x_0)} \subset U$, und sei $\varepsilon < r_1 - r_0$.

Sei $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\varepsilon(0))$, $\psi = 1$ in einer Umgb. von 0. Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ mit $\varphi = 1$ auf $B_{r_1}(x_0)$. Leibniz-Formel $\rightsquigarrow P(\partial)(\varphi u) = \varphi P(\partial)u + g$ wobei $\varphi P(\partial)u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g = 0$ auf $B_{r_1}(x_0)$, da g Ableitungen von φ enthält. Es gilt

$$\varphi u = \delta * \varphi u = (P(D)E) * \varphi u = E * (P(\partial)(\varphi u)) = \overbrace{E * \varphi P(\partial)u}^{\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)} + E * g$$

$\rightsquigarrow \varphi u - E * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Außerdem $E * g = (\psi E) * g + ((1-\psi)E) * g$ wobei $(1-\psi)E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow ((1-\psi)E) * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}(\psi E) * g \subset \operatorname{supp}(\psi E) + \operatorname{supp} g \subset B_\varepsilon(0) + \operatorname{supp} g \rightsquigarrow (\psi E) * g = 0$ auf $B_{r_0}(x_0)$

$\rightsquigarrow u|_{B_{r_0}(x_0)} = \varphi u|_{B_{r_0}(x_0)} \in \mathcal{C}^\infty(B_{r_0}(x_0))$. ∎

18.06.2015

4. Die Laplace-Gleichung

4.1. Green-Formeln und Darstellungssatz

Wir errinern zunächst den Satz von Gauss (Divergenzsatz) und die Green-Formeln.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und stückweise $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ und $F = (F_1, \dots, F_n) : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}^n$, $F_j \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, \dots, n$.

Die Divergenz des Vektorfeldes F ist

$$\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^{n} \partial_j F_j$$

Sei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld; es ist definiert außerhalb einer Nullmenge in $\partial\Omega$.

Der Satz von Gauss lautet:

$$(4.1.1) \qquad \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds$$

<u>4.1.1. Satz (Green-Formeln)</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, stückweise $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$.

(a) Für $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, gilt

$$(4.1.2) \qquad \int_{\Omega} \left(u \Delta v + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle\right) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds$$

(b) Für $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ gilt

$$(4.1.3) \qquad \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds$$

<u>Beweis</u> (a) Wende (4.1.1) auf $F = u \operatorname{grad} v$ an und benutze

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \sum \partial_j (u \partial_j v) = u \Delta v + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle.$$

Außerdem $\frac{\partial v}{\partial \nu} := \langle \operatorname{grad} v, \nu \rangle$, also $\langle u \operatorname{grad} v, \nu \rangle = u \frac{\partial v}{\partial \nu}$.

(b) Wir schreiben (4.1.2) mit u, v permutiert und subtrahieren aus (4.1.2). ▨

Betrachte die Fundamentallösung des Laplace-Operators

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\,\mathcal{K}_{n-1}} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} & , n \geq 3. \\ \frac{1}{2\pi} \log \|x\| & , n = 2. \end{cases}$$

<u>4.1.2. Satz</u> (Darstellung durch Potentiale)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, der Klasse $\mathcal{C}^1$.
Sei $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ und bezeichne $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\tilde{u}(x) = u(x)$ für $x \in \Omega$, $\tilde{u}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Dann gilt

$$\tilde{u}(x) = \int_\Omega \Delta u(y)\, E(x-y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, E(x-y)\, ds(y)$$

(4.1.4)

$$+ \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)\, ds(y) \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega.$$

<u>Beweis</u> Wir benutzen die Formel

$\tilde{u} = \tilde{u} * \delta = \tilde{u} * \Delta E = \Delta\tilde{u} * E$ und wollen daher $\Delta\tilde{u} * E$ berechnen. Zunächst berechnen wir die Distribution $\Delta\tilde{u}$. Für $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt wegen (4.1.3):

$$\langle \Delta\tilde{u}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \Delta\varphi \rangle = \int_\Omega u \Delta\varphi\, dx = \int_\Omega \varphi \Delta u\, dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

Wir schreiben nun $\Sigma = \partial\Omega$ und wir führen die folgenden Distributionen für $a \in \mathcal{C}(\Sigma)$ gegeben:

$$a\delta_\Sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \langle a\delta_\Sigma, \varphi\rangle = \int_\Sigma a\varphi \, ds$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(a\delta_\Sigma) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial\nu}(a\delta_\Sigma), \varphi\right\rangle = -\int_\Sigma a\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, ds$$

Beide sind Distributionen mit kompakten Träger, der Träger ist in Σ enthalten. Es folgt

$$\Delta\tilde{u} = \widetilde{\Delta u} - \frac{\partial}{\partial\nu}(u\delta_\Sigma) - \frac{\partial u}{\partial\nu}\delta_\Sigma .$$

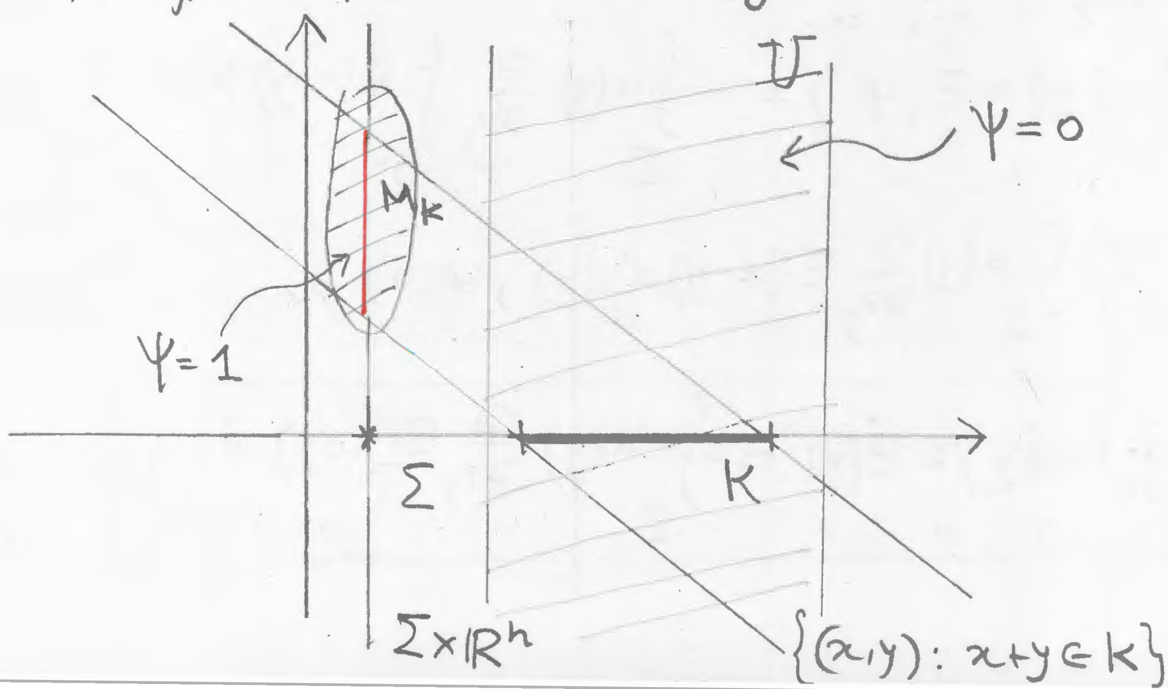
und

$$\tilde{u} = \Delta\tilde{u} * E = \widetilde{\Delta u} * E - \left(\frac{\partial}{\partial\nu}(u\delta_\Sigma)\right) * E - \left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\delta_\Sigma\right) * E$$

Die Faltungen sind wohldefiniert, da die Distributionen aus der Formel für $\Delta\tilde{u}$ kompakten Träger haben.
Da $\widetilde{\Delta u}$, E lokal integrierbar sind, so ist auch deren Faltung und

$$(\widetilde{\Delta u} * E)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\,\widetilde{\Delta u}(y)\,dy = \int_\Omega E(x-y)\,\Delta u(y)\,dy$$

Um die andere Faltungen zu berechnen, sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ mit $K \cap \Sigma = \emptyset$ und $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\psi = 1$ in der Umgebung von $\{(x,y) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x+y \in K\}$, $\psi(x,y) = 0$ für x in einer Umgb von K.



Die Definition der Faltung ergibt

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta_\Sigma\right) * E, \varphi \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta_\Sigma\right)(y), \left\langle E(x), \psi(y,x)\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta_\Sigma\right)(y), \int_{\mathbb{R}^n} E(x)\,\psi(x,y)\,\varphi(x+y)\,dx \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta_\Sigma\right)(y), \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\,\psi(y,x-y)\,\varphi(x)\,dx \right\rangle$$

$$= \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\,\psi(y,x-y)\,\varphi(x)\,dx\,ds(y)$$

$$= \int_K \varphi(x) \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,E(x-y)\,\underbrace{\psi(y,x-y)}_{=1 \text{ da } y\in\Sigma,\ y+(x-y)=x\in K.}\,ds(y)\,dx$$

$$= \left\langle \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,E(x-y)\,ds(y), \varphi(x) \right\rangle$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta_\Sigma\right) * E(x) = \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,E(x-y)\,ds(y)}$$

Analog

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \nu}(u\delta_\Sigma) * E, \varphi \right\rangle = -\int_\Sigma u(y)\,\frac{\partial}{\partial \nu_y}\int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\,\psi(y,x-y)\,\varphi(x)\,dx\,ds(y)$$

$$= -\left\langle \int_\Sigma u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)\,ds(y), \varphi(x) \right\rangle$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial \nu}(u\delta_\Sigma) * E(x) = -\int_\Sigma u(y)\,\frac{\partial}{\partial \nu_y}E(x-y)\,ds(y)}$$

<u>4.1.3 Bemerkung</u> (a) Das erste Integral in (4.1.4) heißt Newtonsche-Potential (oder Volumpotential), das zweite Einzelschichtpotential, das dritte Doppelschichtpotential. Diese Bezeichnungen haben physikalische Motivation.

(b) Die Green-Formel (4.1.3) gilt unter allgemeineren Voraussetzung: Ω ist der Klasse $\mathcal{C}^2$, $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u, \Delta v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ und u, v haben eine reguläre Normalableitung, d.h. $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} u(x + \varepsilon \nu(x))$ gleichmäßig für $x \in \partial\Omega$.

<u>4.1.4 Definition</u> Eine Fkt $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ heißt <u>harmonisch.</u>

Der Satz 3.5.2 impliziert, dass eine harmonische Fkt $\mathcal{C}^\infty$ ist. Man kann zeigen, dass sie sogar analytisch sind.

<u>4.1.5 Satz</u> (Mittelwerteigenschaft) Sei $u \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$ und $\Delta u = 0$ in $B_R(x_0)$. Dann gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_{n-1} R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y)\, ds(y).$$

<u>Beweis</u> Sei $\rho \in (0, R)$. Wir wenden (4.1.4) auf u und $\Omega = B_\rho(x_0)$ an:

$$u(x_0) = - \int_{S_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) E(x_0 - y)\, ds(y) + \int_{S_\rho(x_0)} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x_0 - y)\, ds(y)$$

Betrachte nun $n \geq 3$. Für $n = 2$ argumentiert man ähnlich.

$$E(x_0 - y) = - \frac{1}{(n-2)\varkappa_{n-1}} \frac{1}{\|x_0 - y\|^{n-2}} = - \frac{1}{(n-2)\varkappa_{n-1}} \cdot \frac{1}{\rho^{n-2}}, \; y \in S_\rho(x_0)$$

$$\rightsquigarrow - \int_{S_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) E(x_0 - y)\, ds(y) = \frac{1}{(n-2)\varkappa_{n-1} \rho^{n-2}} \int_{S_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, ds$$

Für $\nu=1$ in (4.1.3) folgt $\int_{S_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = \int_{B_\rho(x_0)} \Delta u\, dx = 0.$

Für das zweite Integral:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x_0-y) = -\frac{\langle x_0-y, \nu(y)\rangle}{\mathcal{K}_{n-1}\|x_0-y\|^n} = \frac{1}{\mathcal{K}_{n-1}\rho^{n-1}}$$

Denn für $y\in S_\rho(x_0)$ gilt $\|x_0-y\|=\rho$, $\nu(y)=\frac{y-x_0}{\rho}$.

Schließlich

$$u(x_0) = \frac{1}{\mathcal{K}_{n-1}\rho^{n-1}}\int_{S_\rho(x_0)} u(y)\, ds(y) \xrightarrow[\rho\nearrow R]{} \frac{1}{\mathcal{K}_{n-1}R^{n-1}}\int_{S_R(x_0)} u(y)\, ds$$

▨

<u>Bemerkung</u> $\mathcal{K}_{n-1}R^{n-1} = \mathrm{vol}(S_R(x_0))$ daher der Name Mittelwert.

23.06.2015

<u>4.1.6 Satz</u> (Maximumprinzip) Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $u:\Omega\to\mathbb{R}$ harmonisch. Falls u ihr Maximum in Ω annimmt, so ist u konstant.

<u>Beweis</u> Sei $M=\sup\{u(x): x\in\Omega\}$. Laut Hypothese gibt es $x_0\in\Omega$ mit $u(x_0)=M$. Sei $U=\{x\in\Omega: u(x)=M\}$. Die Menge U ist nicht leer (denn $x_0\in U$), abgeschlossen (weil u stetig ist) und offen. In der Tat, sei $x\in U$ und $\overline{B_r(x)}\subset\Omega$. Für jedes $0<\rho<r$ gilt laut 4.1.5

$$\int_{S_\rho(x)} \big(u(y)-u(x)\big)\, ds(y) = 0$$

und $u(y)-u(x)\le 0$ für alle $y\in S_\rho(x)$. Da $y\mapsto u(y)-u(x)$ stetig auf $S_\rho(x)$ ist, folgt $u(y)-u(y)=0$ für alle $y\in S_\rho(y)$. Da ρ beliebig ist, $u\equiv u(y)$ auf $B_r(x) \rightsquigarrow B_r(x)\subset U \rightsquigarrow U$ offen. Ω zshg $\rightsquigarrow U=\Omega$. ▨

4.1.7 Korollar Sei Ω offen, zusammenhängend, beschränkt. Sei $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig, harmonisch in Ω. Dann nimmt u ihr Maximum auf $\partial\Omega$ an.

Beweis $\overline{\Omega}$ kompakt $\rightsquigarrow$ u nimmt ihr Maximum auf $\overline{\Omega}$ an. Ist das ein innerer Punkt, so ist u konstant, das Maximum ist also auch auf $\partial\Omega$ angenommen. ∎

4.1.8 Satz (Identitätssatz)

Sei Ω offen, zusammenhängend, beschränkt. Seien $u_1, u_2: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, stetig und harmonisch auf Ω.

Gilt $u_1 = u_2$ auf $\partial\Omega$, so ist $u_1 = u_2$ auf Ω.

Beweis Real- und Imaginärteil von $u_1 - u_2$ und $u_2 - u_1$ sind harmonisch und nehmen ihr Maximum auf $\partial\Omega$ an. Dieses Maximum ist Null, also $u_1 = u_2$. ∎

4.2. Das Volumpotential

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $\rho \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Das Volumpotential zum Gewicht ρ ist die Funktion

$$V(x) = \int_\Omega E(x-y)\,\rho(y)\,dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

4.2.1 Lemma Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen. Sei $k: M \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ beschränkt, stetig für $x \neq y$. Sei $K(x,y) = k(x,y)\,\|x-y\|^{-\lambda}$, $\lambda < n$, so ist $u: M \to \mathbb{C}$

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y)\,dy$$

stetig auf M.

Beweis (a) Es gilt

$$\int_{\|x\| \le R} \|x\|^{-\lambda}\,dx < \infty \iff \lambda < n$$

Daraus folgt, dass das Integral $u(x)$ wohldefiniert ist, da k beschränkt ist: $\exists A > 0 : |k(x,y)| \leq A$ auf $M \times \overline{\Omega}$.

(b) Wir zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in M\ \forall x \in M \cap B_\delta(x_0)$

$$\left| \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)\, dy \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

In der Tat

$$\left| \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)\, dy \right| \leq A \int_{B_{2\delta}(x)} \|x-y\|^{-\lambda} dy \overset{x-y=\delta z}{=} A\delta^{n-\lambda} \int_{B_2(0)} \|x\|^{-\lambda} dx$$

$$\leq CA\delta^{n-\delta}$$

und wir können δ genugend klein nehmen.

(c) Sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in M$, $\eta_0 \in (0, \delta)$, wobei δ ist wie in (b), und $M \cap \overline{B_{\eta_0}(x_0)}$ ist kompakt.

Die Funktion K ist stetig auf der komp. Menge

$$L = \left(M \cap \overline{B_{\eta_0}(x_0)} \right) \times \left(\overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0) \right)$$

also gleichmäßig stetig. Es gibt also $\eta \in (0, \eta_0)$ so dass für alle $(x,y) \in L$ gilt

$$|K(x,y) - K(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{vol}(\Omega)}$$

(d) Für $x \in M \cap B_\eta(x_0)$ gilt

$$u(x) - u(x_0) = \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} \left(K(x,y) - K(x_0,y)\right) dy + \int_{\Omega \setminus B_\delta(x_0)} \left(K(x,y) - K(x_0,y)\right) dy$$

Aus (b), (c) folgt $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$. ∎

4.2.2 Satz Sei $\rho \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann gilt: (a) $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$
(b) V is harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ (c) $\exists C > 0$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|V(x)| \le C \sup_{\Omega} |\rho| \cdot (1+\|x\|)^{2-n}$$

$$|\partial_i V(x)| \le C \sup_{\Omega} |\rho| (1+\|x\|)^{1-n}, \quad i=1,\dots,n.$$

Beweis (a) Sei $M = \mathbb{R}^n$ in 4.2.1. $\rightsquigarrow V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ und $x \mapsto V_i(x) := \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} E(x-y)\rho(y)\,dy$ sind stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Sei $z \in \mathbb{R}^n$ fest. Nach Fubini

$$\int_{z_i}^{x_i} V_i(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots x_n)\,dt = \int_\Omega \rho(y) \int_{z_i}^{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} E(x_1-y_1,\dots,t-y_i,\dots,x_n-y_n)\,dt\,dy$$

$$= \int_\Omega \rho(y)\Big(E(x-y) - E(x_1-y_1,\dots,z_i-y_i,\dots,x_n-y_n)\Big)\,dy$$

$$= V(x) - V(x_1,\dots,z_i,\dots,x_n)$$

Wir dividieren durch $x_i - z_i$ und lassen $x_i \to z_i \rightsquigarrow \exists \partial_i V$ und $\partial_i V = V_i$, also $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ können wir unter Integral in der Def von V ableiten: Die Funktion $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \ni x \mapsto E(x-y)\rho(y)$ ist $\mathcal{C}^\infty$ für $y \in \overline{\Omega}$ fest und ihre Ableitungen $y \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} E(x-y)\rho(y)$ sind integrierbar auf Ω.

Folglich $\Delta_x V = \int_\Omega \Delta_x E(x-y)\rho(y)\,dy = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$

(c) Übung.

<u>4.2.3 Satz</u> Sei V das Volumpotential mit Gewicht $\rho \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

(a) $V \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ (b) $\Delta V = \rho$ auf Ω (im klassischen Sinne)

<u>Beweis</u> Es reicht die Eigenschaften (a),(b) in der Nähe eines Punktes $x_0 \in \Omega$ zu beweisen. Sei $R > 0$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ und

$$V_R(x) = \int_{B_R(x_0)} \rho(y)\, E(x-y)\, dy$$

Dann ist $$V(x) - V_R(x) = \int_{\Omega \setminus B_R(x_0)} \rho(y)\, E(x-y)\, dy$$

und das Integral ist harmonisch auf dem Komplement von $\Omega \setminus B_R(x_0)$, also auch auf $B_R(x_0) \leadsto V - V_R \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0))$

(a) Es reicht also zu zeigen dass $V_R \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0))$.

$$\frac{\partial V_R}{\partial x_j}(x) = \int_{B_R(x_0)} \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_j} E(x-y)\, dy = -\int_{B_R(x_0)} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} E(x-y)\, dy$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x_0) \setminus B_\varepsilon(x)} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} E(x-y)\, dy$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\int_{B_R(x_0) \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \rho}{\partial y_j} E(x-y)\, dy + \int_{S_R(x_0)} \rho(y)\, \nu_j(y)\, E(x-y)\, ds \right.$$
$$\left. - \int_{S_\varepsilon(x)} \rho(y)\, \nu_j(y)\, E(x-y)\, ds \right]$$

Dabei haben wir die Gauss-Formel auf $B_R(x_0) \setminus B_\varepsilon(x)$ verwendet und $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ sind die Einheitsnormalvektoren zu $S_R(x_0)$ und $S_\varepsilon(x)$. Für das letzte Integral gilt:

$$\left| \int_{S_\varepsilon(x)} \rho(y)\nu_j(y) E(x-y)\, ds(y) \right| \leq \frac{1}{(n-2)\mathcal{K}_{n-1}\, \varepsilon^{n-2}} \cdot \sup_{S_\varepsilon(x)} |\rho| \cdot \mathcal{K}_{n-1} \cdot \varepsilon^{n-1}$$

Für $\varepsilon \to 0$, strebt das Integral gegen Null. Somit

$$\frac{\partial V_R}{\partial x_j}(x) = \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial \rho}{\partial y_j}(y) E(x-y)\, dy - \int_{S_R(x_0)} \rho(y)\nu_j(y) E(x-y)\, ds(y)$$

Da $\partial_j \rho \in \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$, Lemma 4.2.2 zeigt, dass das erste Integral eine Fkt in x der Klasse $\mathcal{C}^1$ auf $\mathbb{R}^n$ ist. Das zweite Integral ist in $\mathcal{C}^\infty(B_R(x_0))$. Also

$\frac{\partial V_R}{\partial x_j} \in \mathcal{C}^1(B_R(x_0)) \rightsquigarrow V_R \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0))$.

(b) Wissen, dass $\Delta V = \rho$ im Sinne der Distributionen in Ω. Daraus folgt, dass $\Delta V = \rho$ auch in klassischen Sinne gilt, siehe S. 55. ▨

Bemerkung I. A. gilt nur $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, nicht $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

4.3. Das Doppelschichtpotential

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, der Klasse $\mathcal{C}^2$ und $\mu \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Das Doppelschichtpotential zum Gewicht μ ist

$$W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad W(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)\, ds(y).$$

Um W zu studieren, brauchen wir das Analog von Lemma 4.2.1 für die Integration auf $\partial\Omega$.

4.3.1 Lemma Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen und $k : M \times \partial\Omega \to \mathbb{C}$ beschränkt, stetig für $x \neq y$.

Falls $K(x,y) = k(x,y)\,\|x-y\|^{-\lambda}$, $\lambda < n-1$, dann ist

$$u : M \to \mathbb{C}\,,\quad u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x,y)\, ds(y)$$

stetig auf M. ▨

Wir beobachten, dass

$$W(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y)\, K_0(x,y)\, ds(y) \quad \text{mit } K_0(x,y) := -\frac{\langle x-y, \nu(y)\rangle}{\mathcal{K}_{n-1}\|x-y\|^n}.$$

4.3.2 Satz (a) W ist harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$

(b) $W|_{\partial\Omega}$ ist stetig.

Beweis (a) $(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega) \times \partial\Omega \ni (x,y) \mapsto \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)$ ist stetig, $\mathcal{C}^\infty$ und harmonisch in $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ für $y \in \partial\Omega$ fest. Wir können unter Integral ableiten

$$\Delta_x W(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y)\, \Delta_x \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)\, ds = 0$$

(b) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Wir können annehmen, dass es gibt eine Umgb U von x_0 mit $\partial\Omega \cap U = \{(x', x_n) : x_n = \psi(x')\}$ wobei $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\psi \in \mathcal{C}^2$. Also ist $\partial\Omega \cap U$ ein Graph über $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \cap U = \{\varphi = 0\}$, $\varphi(x) = x_n - \psi(x')$, $\Omega = \{x \in U : \varphi(x) < 0\}$. Dann ist

$$\nu(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}}, 1\right).$$

$$\rightsquigarrow |\langle x-y, \nu(y)\rangle| = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad}\psi(y')\|^2}} \cdot \left\| \psi(x') - \psi(y') - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j \psi(y')(x_j - y_j) \right\|$$

da $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_{n-1} - y_{n-1}, \psi(x') - \psi(y'))$, für $x, y \in \partial\Omega \cap U$.

Wir benutzen nun die Taylorformel um y' und bekommen

$$\psi(x') - \psi(y') - \sum \partial_j \psi(y')(x_j - y_j) = O(\|x'-y'\|^2)$$

gleichmäßig in einer Umgb von x_0. Also $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\exists C_0 > 0$ $\forall x, y \in \partial\Omega \cap B_{\varepsilon_0}(x_0)$:

$$|\langle x-y, \nu(y)\rangle| \leq C_0 \|x-y\|^2$$

Sei nun $x \in B_{\varepsilon_0/2}(x_0) \cap \partial\Omega$ und $y \in \partial\Omega \setminus B_{\varepsilon_0}(\partial\Omega)$.

$$|\langle x-y, \nu(y)\rangle| \leq \|x-y\| \cdot \underbrace{\|\nu(y)\|}_{=1} \leq \frac{2}{\varepsilon_0} \|x-y\|^2$$

Insgesamt $\exists C_1 > 0$ $\forall x \in \partial\Omega \cap B_{\varepsilon_0/2}(x_0)$, $y \in \partial\Omega$

$$|\langle x-y, \nu(y)\rangle| \leq C_1 \|x-y\|^2$$

Da $\partial\Omega$ kompakt ist $\exists C > 0$ $\forall x, y \in \partial\Omega$

$$|\langle x-y, \nu(y)\rangle| \leq C \|x-y\|^2$$

und

$$|K_0(x,y)| \leq C \|x-y\|^{2-n}$$

Lemma 4.3.1 $\rightsquigarrow$ $W \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. ▨

Die Einschränkung von W auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ und $\partial\Omega$ ist stetig, W ist aber nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$.

<u>4.3.3. Lemma</u> Falls $\mu \equiv 1$ so gilt

$$W(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ \frac{1}{2}, & x \in \partial\Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

<u>Beweis</u> Formel (4.1.4):

$$\tilde{u}(x) = \int_\Omega \Delta u(y) E(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) E(x-y)\,ds(y) + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)\,ds$$

wobei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\tilde{u}(x) = u(x), x \in \Omega$, $\tilde{u}(x) = 0, x \notin \overline{\Omega}$.

Setze nun $u \equiv 1 \leadsto \Delta u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ also

$$W(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)\, ds = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

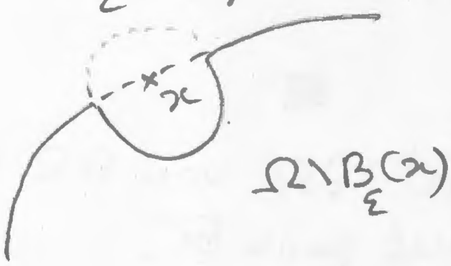
30.06.2015

Sei nun $x \in \partial\Omega$ fest. Sei $\varepsilon > 0$ klein genug. Wir wenden die Greensche-Formel (4.1.3) für $u = 1$, $v(y) = E(x-y)$ auf $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$:

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \Big(u \underbrace{\Delta v}_{=0} - v \underbrace{\Delta u}_{=0} \Big) dy = \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} \Big(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0} \Big) ds$$

$$\leadsto \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)\, ds(y) = 0 \leadsto \int_{\partial\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} K_0(x,y)\, ds = \int_{\Omega \cap S_\varepsilon(x)} K_0(x,y)\, ds$$

(die Orientierung des letzten Integral ist als Rand von $B_\varepsilon(x)$)



Nun gilt

$$\int_{\Omega \cap S_\varepsilon(x)} K_0(x,y)\, ds = \int_{\Omega \cap S_\varepsilon(x)} - \frac{\langle x-y, \nu(y) \rangle}{\mathcal{K}_{n-1} \|x-y\|^n}\, ds$$

und $\nu(y) = \frac{y-x}{\|x-y\|}$, also

$$\int_{\Omega \cap S_\varepsilon(x)} K_0(x,y)\, ds = \frac{1}{\mathcal{K}_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \int_{\Omega \cap S_\varepsilon(x)} ds$$

Wir wollen das letze Integral abschätzen. Dafür wählen wir ein Koordinatensystem zentriert in x und mit der Achse Oy_n in der Richtung von $\nu(x)$: