5. Der Wärmeleitungsoperator

Sei $u(x,t)$ die Temperatur eines homogenen, isotropen Mediums an einem Ort $x \in \mathbb{R}^n$ und zu einer Zeit $t \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt u die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t - \Delta = \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = 0; \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Der dazugehörige Differentialoperator wird *Wärmeleitungsoperator* genannt. Auch andere Diffusionsprozesse, wie zum Beispiel die Mischung von zwei Flüssigkeiten durch Brownsche Bewegung, erfüllen die Wärmeleitungsgleichung.

5.1. Der Gauss-Kern.

Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gibt die Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + \|\xi\|^2 \widehat{u}(\xi,t) &= 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) &= \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat die Lösung

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi) e^{-\|\xi\|^2 t}.$$

Mit der Inversionsformel der Fouriertransformation folgt

$$\begin{aligned} (2\pi)^n u(-x,t) &\overset{3.4.9}{=} \widehat{\widehat{u}(\xi,t)} = \widehat{\widehat{f}(\xi) e^{-\|\xi\|^2 t}} \overset{3.4.10d}{=} (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{f}(\xi)} * \widehat{e^{-\|\xi\|^2 t}} \\ &\overset{3.4.8}{=} (2\pi)^{-n} (2\pi)^n f(-x) * \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\|x\|^2} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} f(-x) * e^{-\frac{1}{4t}\|x\|^2} \\ \Rightarrow \quad u(x,t) &= f(x) * (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\|x\|^2} \end{aligned}$$

Damit ist $u(x,t) = f * K_t(x)$ mit

$$\boxed{K_t(x) = K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}}. \tag{5.1}$$

Diese Funktion wird *Gauss-Kern*, *Gauss-Weierstrass-Kern* oder auch *Wärmeleitungskern* genannt. Es gilt

$$K_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} K_1\left(t^{-\frac{1}{2}} x\right) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x)\,dx = \widehat{K_t}(0) = 1.$$

Als Anwendung von Satz 3.3.7 folgt somit:

Satz 5.1. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Dann erfüllt $u(x,t) = f * K_t(x)$ die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.*
Ist f beschränkt und stetig, dann ist u stetig auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und $u(x,0) = f(x)$.
Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p < \infty$, so konvergiert $u(\cdot,t)$ gegen f in der L^p-Norm für $t \to 0$.

Bemerkung 5.2. Ist $|f(x)| \leq Ce^{\frac{\|x\|^2}{4T}}$ für ein $T \in (0, \infty)$, dann ist $f * K_t$ definiert für $t < T$ und durch Differentiation unter dem Integral kann diese Funktion unendlich oft abgeleitet werden und somit ist $f * K_t \in C^\infty$. Solange f diese Wachstumseigenschaft erfüllt, ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung eine glatte Funktion. Es ist also nicht zu erwarten eine Lösung zu finden für $t < 0$, außer wenn bekannt ist, dass die Ausgangsfunktion schon glatt war. Diese mathematische Aussage korreliert mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik aus der Physik, der aussagt, dass die Entropie in einem System nicht abnimmt.

Satz 5.3 („Eindeutigkeit"). *Sei $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ und u erfülle das Anfangswertsystem*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$, so dass

$$|u(x,t)| \leq Ce^{\varepsilon\|x\|^2} \quad \textit{und} \quad |\nabla_x u(x,t)| \leq Ce^{\varepsilon\|x\|^2},$$

dann folgt $u \equiv 0$.

Beweis. Für $f, g \in C^2(U)$; $u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gilt

$$g(\partial_t f - \Delta f) + f(\partial_t g + \Delta g) = \sum_{j=1}^n \partial_j(f\partial_j g - g\partial_j f) + \partial_t(fg) = \operatorname{div}_{x,t} F$$

mit $F = (f\partial_1 g - g\partial_1 f, \ldots, f\partial_n g - g\partial_n f, fg)$.

Seien $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x,t) &= u(x,t) && \Rightarrow && \partial_t f - \Delta f = 0, \quad t > 0 \\ g(x,t) &= K(x - x_0, t_0 - t) && \Rightarrow && \partial_t g + \Delta g = 0, \quad t < t_0 \end{aligned}$$

und

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\| < r,\ a < t < b\}, \quad 0 < a < b < t_0.$$

Mit dem Divergenzsatz folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega g(\partial_t f - \Delta f) + f(\partial_t g + \Delta g) = \int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \\ &= \int_{\|x\| \leq r} u(x,b) K(x - x_0, t_0 - b) dx - \int_{\|x\| \leq r} u(x,a) K(x - x_0, t_0 - a) dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_a^b \int_{\|x\|=r} \left[u(x,t)\partial_j K(x,t) - K(x,t)\partial_j u(x,t)\right] \frac{x_j}{r} ds(x) dt \\ &= I + II + III \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$I \xrightarrow{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,b)K(x-x_0,t_0-b)dx = \left[u(\cdot,b) * K_{t_0-b}\right](x_0) \xrightarrow{b\to t_0} u(x_0,t_0)$$

$$II \xrightarrow{r\to\infty} -\int_{\mathbb{R}^n} u(x,a)K(x-x_0,t_0-a)dx = \left[u(\cdot,a) * K_{t_0-a}\right](x_0)$$

$$\xrightarrow{a\to 0} u(\cdot,0) * K_{t_0}(x_0) = 0$$

$$|III| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \int_{\|x\|=r} Ce^{-\left(\frac{1}{4t}-\varepsilon\right)r^2} \left(1+\frac{x_j}{t}\right) \frac{|x_j|}{r} ds(x)dt \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

für ε klein genug.

Zieht man alle drei Grenzwerte, so folgt also $u(x_0,t_0) = 0$ und da $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ beliebig war folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.4. Ohne die Wachstumsbeschränkungen bei ∞ ist diese Aussage des vorhergehenden Satzes nicht richtig: Sei $g(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ beliebig und definiere

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)x^{2k}}{(2k)!}.$$

Dann erfüllt diese Reihe die Wärmeleitungsgleichung solange sie konvergiert. Die Konvergenz ist zum Beispiel für die Funktion $g(t) = \exp(-t^{-2})$ erfüllt, die zusätzlich die Eigenschaft $g^k(0) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Für diese Funktion erfüllt $u(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$ obwohl die Lösung verschieden von 0 ist.

Bemerkung 5.5. Andererseits gibt es einen Satz von Widder, der aussagt dass für $f \geq 0$ die Faltung $f * K_t(x)$ die einzige *nicht negative* Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Aus physikalisch Sicht ist das ein sinnvolles Resultat, da es bei Temperaturen einen absoluten Nullpunkt gibt. Mist man Temperatur in der Kelvin Skala, die beim absoluten Nullpunkt beginnt, so sind sie immer positiv.