Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Übung 1 – wird am 14. und 16. 4. in den Übungen besprochen

Aufgabe 1
Beweisen Sie, dass die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ rotationsinvariant ist, das heißt:
Ist O eine orthogonale $n \times n$-Matrix und $v(x) := u(Ox)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt auch $\Delta v = 0$.

Lösung:
Mit $O = (a_{ij})$ und $y := Ox$ folgt:

$$(\Delta v)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u(y) \overset{\text{Kettenr.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \sum_{j=1}^{n} \partial_{y_j} u(y) \partial_{x_i} y_j$$

$$\partial_{x_i} y_j = \partial_{x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \right) = a_{ji}$$

$$\Rightarrow \quad (\Delta v)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \sum_{j=1}^{n} \partial_{y_j} u(y) a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{y_k} \partial_{y_j} u(y) \partial_{x_i} y_k a_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{y_k} \partial_{y_j} u(y) a_{ki} a_{ji}$$

Da O orthogonal ist, gilt $OO^T = I_n$ und somit $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} a_{ji} = (OO^T)_{kj} = \delta_{kj}$.

$$\Rightarrow \quad (\Delta v)(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{y_k} \partial_{y_j} u(y) \delta_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \partial_{y_j}^2 u(y) = (\Delta u)(y) = 0$$

Aufgabe 2
Sei $u \in C^\infty$ eine Lösung von $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ in $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ auch eine Lösung ist.

b) Benutzen Sie a) um zu zeigen, dass $v(x,t) := \langle x, \operatorname{grad}_x u(x,t)\rangle + 2t\partial_t u(x,t)$ ebenfalls die Differentialgleichung löst.

Lösung:
zu a):

$$\begin{aligned}
\partial_t u_\lambda(x,t) &= \partial_t u(\lambda x, \lambda^2 t) \overset{s=\lambda^2 t,\text{ Kettenr.}}{=} \partial_s u(\lambda x, \lambda^2 t)\partial_t(\lambda^2 t) = \partial_s u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda^2 \\
\Delta_x u_\lambda(x,t) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(\lambda x, \lambda^2 t) \overset{y=\lambda x,\text{ Kettenr.}}{=} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} u(\lambda x, \lambda^2 t)\partial_{x_i}(\lambda x_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\partial_{y_i} u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}^2 u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda^2 = \Delta_y u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_t - \Delta_x)u_\lambda(x,t) = (\partial_s - \Delta_y)u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda^2 = 0$$

zu b): Einerseits:

$$(\partial_t - \Delta_x)\partial_\lambda u_\lambda(x,t) \overset{u\in C^3,\text{ Satz von Schwarz}}{=} \partial_\lambda(\partial_t - \Delta_x)u_\lambda(x,t) \overset{i)}{=} 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda u_\lambda(x,t) &= \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = \langle \operatorname{grad}_y u(\lambda x, \lambda^2 t), x\rangle + \partial_s u(\lambda x, \lambda^2 t)2\lambda t \\
\Rightarrow \quad \partial_\lambda u_\lambda(x,t)|_{\lambda=1} &= \langle \operatorname{grad}_x u(x,t), x\rangle + \partial_t u(x,t)2t = v(x,t)
\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$(\partial_t - \Delta_x)v(x,t) = (\partial_t - \Delta_x)\partial_\lambda u_\lambda(x,t)|_{\lambda=1} = 0$$

Aufgabe 3
Sei $n = 1$ und $u(x,t) = v(\frac{x^2}{t})$

a) Zeigen Sie $\partial_t u = \partial_x^2 u$ genau dann, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (z > 0) \tag{1}$$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung von Gleichung (1).

c) Sei v die allgemeine Lösung aus b). Betrachten Sie $\Phi(x,t) := \partial_x v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ und wählen sie die Konstanten so, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,t) = 1.$$

Warum gilt $\partial_t \Phi(x,t) = \partial_x^2 \Phi(x,t)$? (Eine Lösung mit diesen Eigenschaften wird häufig als Fundamentallösung der partiellen Differentialgleichung (1) bezeichnet.)

Lösung:
zu a):

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \partial_t \left(v\left(\frac{x^2}{t}\right)\right) \overset{\text{KR}}{=} v'\left(\frac{x^2}{t}\right)\left(-\frac{x^2}{t^2}\right) \\
\partial_x^2 u(x,t) &= \partial_x^2 \left(v\left(\frac{x^2}{t}\right)\right) \overset{\text{KR}}{=} \partial_x \left(v'\left(\frac{x^2}{t}\right)\frac{2x}{t}\right) \overset{\text{KR,PR}}{=} v''\left(\frac{x^2}{t}\right)\frac{4x^2}{t^2} + v'\left(\frac{x^2}{t}\right)\frac{2}{t} \\
\Rightarrow \quad (\partial_t - \partial_x^2)u(x,t) &= -v'\left(\frac{x^2}{t}\right)\frac{x^2}{t^2} - v''\left(\frac{x^2}{t}\right)\frac{4x^2}{t^2} - v'\left(\frac{x^2}{t}\right)\frac{2}{t} \\
&= -\frac{1}{t}\left[4\frac{x^2}{t}v''\left(\frac{x^2}{t}\right) + \left(\frac{x^2}{t}+2\right)v'\left(\frac{x^2}{t}\right)\right] \\
&\overset{z=\frac{x^2}{t}}{=} -\frac{1}{t}\left[4zv''(z) + (z+2)\,v'(z)\right]
\end{aligned}$$

Da $t > 0$ ist folgt damit a).
zu b): (1) ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung, die wir ohne Probleme lösen können.

$$\begin{aligned}
v'(z) &= ce^{-\int \frac{z+2}{4z}dz} = ce^{-\int \frac{1}{4}+\frac{1}{2z}dz} = ce^{-\frac{z}{4}-\frac{1}{2}\ln z} = ce^{-\frac{z}{4}}z^{-\frac{1}{2}}, \quad c \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \quad v(z) &= c\int_0^z e^{-\frac{z}{4}}z^{-\frac{1}{2}}dz + d
\end{aligned}$$

zu c)

$$v\left(\frac{x^2}{t}\right) = c\int_0^{\frac{x^2}{t}} e^{-\frac{z}{4}} z^{-\frac{1}{2}} dz + d$$

$$\Phi(x,t) := \partial_x v\left(\frac{x^2}{t}\right) = ce^{-\frac{x^2}{4t}}\left(\frac{x^2}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2x}{t} = 2ct^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,t) = 2ct^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4t}}dx \overset{u=\frac{x}{2\sqrt{t}}}{=} 4c\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du = 4c\sqrt{\pi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Man könnte explizit nachrechnen, dass die Φ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Es folgt allerdings auch einfach aus dem Satz von Schwarz.