Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Übung 2 – wird am 21. und 23.4. in der Übung besprochen

Lösung von nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit Hilfe von Charakteristiken

Das Anfangswertproblem einer nichtlineare PDG erster Ordnung lässt sich allgemein schreiben als

$$\begin{aligned} F(\operatorname{grad}_x u, u, x) &= 0 \text{ in } U \\ u &= g \text{ auf } \Gamma \qquad\qquad g : \Gamma \to \mathbb{R} \text{ ist gegeben} \end{aligned} \tag{1}$$

Wir wollen diese partielle Differentialgleichung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen. Die Idee ist dabei die Menge U in Kurven zu zerlegen, die alle in Γ beginnen. Die Hoffnung ist nun, das die Lösung, die auf Γ durch g gegeben ist, fortgesetzt werden kann auf die ganze Kurve. Angenommen $x : \mathbb{R} \supset I \to U \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist eine solche Kurve mit $x(0) = x_0 \in \Gamma$. Wir definieren

$$\begin{aligned} z(s) &:= u(x(s)) && \text{...}u \text{ entlang der Kurve } x(s) \\ p(s) &:= \operatorname{grad}_x u(x(s)) && \text{...}\operatorname{grad}_x u \text{ entlang der Kurve } x(s) \end{aligned}$$

und differenzieren

$$\begin{aligned} z'(s) &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} u(x(s)) x_j'(s) = \sum_{j=1}^n p_j(s) x_j'(s). \\ p_i'(s) &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_i} u(x(s)) x_j'(s) \end{aligned}$$

Wir leiten (1) nach x_i ab

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x_i} F(\operatorname{grad}_x u, u, x) \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_{p_j} F(\operatorname{grad}_x u, u, x)\, \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \partial_z F(\operatorname{grad}_x u, u, x)\, \partial_{x_i} u + \partial_{x_i} F(\operatorname{grad}_x u, u, x) \end{aligned}$$

und setzen $x(s)$ ein

$$0 = \sum_{j=1}^n \partial_{p_j} F(p(s), z(s), x(s))\, \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(s) + \partial_z F(p(s), z(s), x(s)) p_i(s) + \partial_{x_i} F(p(s), z(s), x(s))$$

Die Gleichung kann dazu genutzt werden die zweifachen Ableitungen aus p' zu entfernen, wenn angenommen wird, dass

$$\boxed{x_j'(s) = \partial_{p_j} F(p(s), z(s), x(s))}.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} p_i'(s) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \partial_{x_i} u(x(s)) x_j'(s) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \partial_{x_i} u(x(s)) \partial_{p_j} F(p(s), z(s), x(s)) \\ &= -\partial_z F(p(s), z(s), x) p_i(s) - \partial_{x_i} F(p(s), z(s), x(s)) \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich das *gewöhnliche* Differentialgleichungssystem erster Ordnung in p, z, x:

$$\begin{cases} p' = -\partial_z F(p, z, x) p - \operatorname{grad}_x F(p, z, x) \\ z' = \langle \operatorname{grad}_p F(p, z, x), p \rangle \\ x' = \operatorname{grad}_p F(p, z, x), \end{cases}$$

wobei $z(s) = u(x(s))$ und $p(s) = \operatorname{grad}_x u(x(s))$, dass mit bekannten Methoden gelöst werden kann. Dass wird im folgenden an einigen Beispielen demonstriert.

F linear

$$0 = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\partial_{x_i} u(x) + c(x)u(x)$$

Dann ist $F(p,z,x) = \langle b(x), p\rangle + c(x)z$ und $\operatorname{grad}_p F = b(x)$ und das Gleichungssystem vereinfacht sich zu

$$\begin{cases} z' = \langle b(x), p\rangle = -c(x)z \\ x' = b(x). \end{cases}$$

Die Gleichung in p wird nicht benötigt, da es in den anderen beiden GDLs nicht auftaucht.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1\,\partial_{x_2} u - x_2\,\partial_{x_1} u = u &\quad \text{in } U = \{x_1 > 0,\ x_2 > 0\} \\ u = g &\quad \text{auf } \Gamma = \{x_1 > 0,\ x_2 = 0\} \end{aligned}$$

Dann ist $b_1(x_1,x_2) = -x_2,\ b_2(x_1,x_2) = x_1,\ c(x_1,x_2) = -1$. Einsetzen in das Hilfsdifferentialgleichungssystem ergibt

$$\begin{cases} x_1' = -x_2,\ x_2' = x_1 \\ z' = z \end{cases}$$

Die x-Kurven sollen in Γ beginnen, das heißt $x(0) \in \Gamma$. Damit erhalten wir die Randbedingung $x_2(0) = 0$. Weiterhin gilt $z(0) = u(x(0)) = u(x_0, 0) = g(x_0)$ für $x_0 > 0$. Die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems ist dann

$$\begin{cases} x_1(s) = x_0 \cos s,\ x_2(s) = \sin s \\ z(s) = g(x_0)e^s \end{cases}, \quad x_0 > 0, \quad 0 \le s \le \frac{\pi}{2}.$$

Nachdem die Lösung des Hilfsdifferentialgleichungssystems gefunden wurde müssen wir nun noch u berechnen. Sei nun $(x_1, x_2) \in U$ ein beliebiger Punkt, in dem wir u berechnen wollen. Unsere Hoffnung ist, dass dieser Punkt auf einer der x-Kurven liegt.

$$(x_1, x_2) = (x_0 \cos s, x_0 \sin s) \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ s = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Das setzen wir in z ein:

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = g(x_0)e^s = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) e^{\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

F komplett nicht-linear

Beispiel:

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} u\, \partial_{x_2} u = u \quad &\text{ in } U = \{x_1 > 0\} \\ u = g(x_2) = x_2^2 \quad &\text{ auf } \Gamma = \{x_1 = 0\} \end{aligned}$$

Dann ist $F(p, z, x) = p_1 p_2 - z$ und

$$\begin{cases} p' = -\operatorname{grad}_x F - \partial_z F p = p, \\ z' = \langle \operatorname{grad}_p F, p \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle = p_2 p_1 + p_1 p_2 = 2 p_1 p_2 \\ x' = \operatorname{grad}_p F = \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind: $x(0) \in \Gamma \Rightarrow x_1(0) = 0,\ x_2(0) =: x_0,\ z(x(0)) = u(x(0)) = u(0, x_0) = g(x_0) = x_0^2$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $p_2(0) = \partial_{x_2} u(0, x_0) = g'(x_0) = 2x_0$. Aus $\partial_{x_1} u\, \partial_{x_2} u = u$ folgt $p_1(0) p_2(0) = z(x(0)) = x_0^2$ und somit $p_1(0) = \frac{x_0}{2}$. Das Anfangswertsystem lässt sich schrittweise lösen

$$\begin{cases} p_1(s) = \frac{x_0}{2} e^s, \quad p_2(s) = 2x_0 e^s \\ z'(s) = 2x_0^2 e^{2s} \quad \Rightarrow \quad z(s) = x_0^2 e^{2s} \\ x_1'(s) = 2x_0 e^s \quad \Rightarrow \quad x_1(s) = 2x_0(e^s - 1) \\ x_2'(s) = \frac{x_0}{2} e^s \quad \Rightarrow \quad x_2(s) = x_0 + \frac{x_0}{2}(e^s - 1) = \frac{x_0}{2}(e^s + 1) \end{cases}$$

$$U \ni (x_1, x_2) = \Big(2x_0(e^s - 1), \frac{x_0}{2}(e^s + 1) \Big) \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{4x_2 - x_1}{4},\ e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_0} = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1}$$

Einsetzen ergibt

$$u(x_1, x_2) = z(s) = x_0^2 e^{2s} = \left(\frac{4x_2 - x_1}{4} \right)^2 \left(\frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1} \right)^2 = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}.$$