Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 1 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = xye^{-x-y}$.

a) In der Umgebung welcher Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich die Bedingung $f(x,y) = f(x_0, y_0)$ gemäß dem Satz über implizite Funktionen durch eine C^1–Funktion $g : x \mapsto y(x)$ bzw. $\tilde{g} : y \mapsto x(y)$ auflösen?

b) Berechnen Sie jeweils $dg(x_0)$ bzw. $d\tilde{g}(y_0)$.

Zeichnen sie eine qualitative Skizze der Höhenlinien von f. Die Ergebnisse von a) und b) sind dabei hilfreich!

Lösung:

Zu a): Die Aussagen sind erfüllt, wenn man die Voraussetzungen einmal für die erste und einmal für die zweite Variable nachweist. f ist ein Produkt aus C^∞ Funktionen und somit ebenfalls C^∞ auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2$. Noch nachzuprüfen sind die Ableitungen.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{-x-y} + xye^{-x-y}(-1) = x(1-y)e^{-x-y} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \text{ und } y \neq 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xe^{-x-y} + xye^{-x-y}(-1) = y(1-x)e^{-x-y} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \neq 0 \text{ und } x \neq 1$$

Damit existiert g für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\tilde{g}$ für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Zu b): Die Ableitungen ergeben sich ebenfalls

$$dg(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{x_0(1-y_0)e^{-x_0-y_0}}{y_0(1-x_0)e^{-x_0-y_0}} = -\frac{x_0(1-y_0)}{y_0(1-x_0)}$$
$$d\tilde{g}(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{y_0(1-x_0)e^{-x_0-y_0}}{x_0(1-y_0)e^{-x_0-y_0}} = -\frac{y_0(1-x_0)}{x_0(1-y_0)}$$

Zu den Höhenlinien: Durch die Berechnung der Jacobi und Hessematrix findet man ein Maximum bei $(1,1)$:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{-x-y} + xye^{-x-y}(-1) \\ xe^{-x-y} + xye^{-x-y}(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1-x)e^{-x-y} \\ x(1-y)e^{-x-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn $(x,y) = (0,0)$ oder $(1,1)$.

$$H_f(x,y) = e^{-x-y} \begin{pmatrix} -y(2-x) & (1-x)(1-y) \\ (1-x)(1-y) & -x(2-y) \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,1) = e^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_f(1,1)\text{ist negativ definit}$$

Somit ist bei $(1,1)$ ein Maximum mit $f(1,1) = e^{-2}$. Daraus ergeben sich das unterschiedliche Aussehen der Höhenlinien:

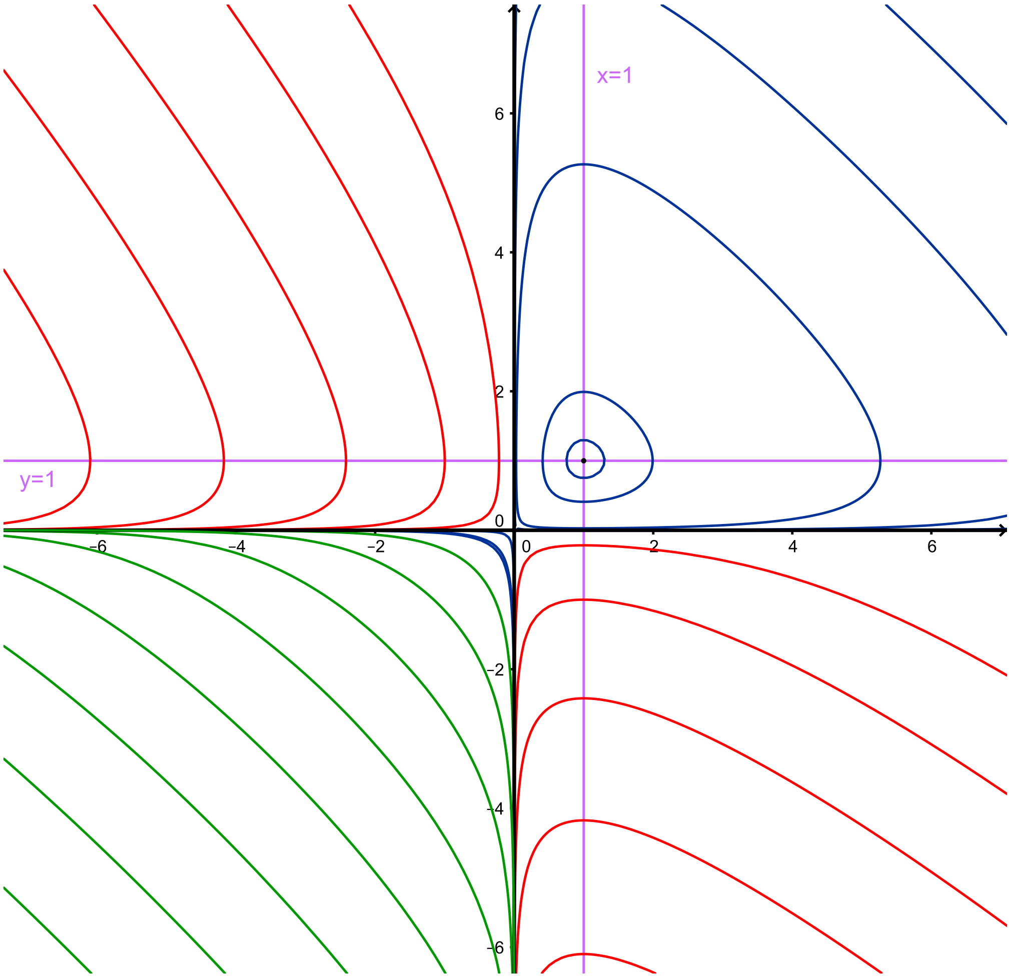

Abbildung 1: Darstellung der Höhenlinien: Die roten Linien gehören zu negativen Höhen, das Koordinatenkreuz ist die Höhenlinie zu $z = 0$, die blauen Linien kennzeichnen Höhenlinien für $0 < z \leq e^{-2}$ und die grünen Linien gehören zu $z > e^{-2}$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := (2e^x - x^2,\ e^y + (x^2+1)y)$. Zeigen Sie:

a) f ist bijektiv.

b) f ist ein C^∞-Diffeomorphismus. Was ist $d(f^{-1})(2,1)$?

Lösung:

Zu a): Die x-Komponente f_x von f ist bei festgehaltenen y bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, denn

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x(x,y) = 2e^x - 2x = 2(e^x - x) > 0 \text{ und } \lim_{x \to \pm\infty} f_x(x,y) = \pm\infty.$$

Für die y-Komponente f_y gilt dasselbe bei festgehaltenem y, denn

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y(x,y) = e^y + x^2 > 0 \text{ und } \lim_{y \to \pm\infty} f_y(x,y) = \pm\infty.$$

Ist (u,v) in $\mathbb{R}^2$, dann gibt es ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$ mit $f_x(x,y) = f_x(x) = u$. Mit diesem x gibt es aber auch ein eindeutiges $y \in \mathbb{R}$, so dass $f_y(x,y) = v$. Also ist f bijektiv.

Zu b): $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ da es Produkt und Summe von C^∞-Funktionen ist. Ihre Jacobimatrix ist

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^x - 2x & 0 \\ 2xy & e^y + x^2 + 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \det J_f(x,y) = 2\underbrace{(e^x - x)}_{>0}\underbrace{(e^y + x^2 + 1)}_{>0} > 0$$

und somit für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar. Nach dem Diffeomorphiesatz ist f somit ein C^∞-Diffeomorphismus.

$$d\left(f^{-1}\right)(2,1) = \left(J_f\left(f^{-1}(2,1)\right)\right)^{-1} = \left(J_f\left(0,0\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$. Zeigen Sie:

a) f ist eine injektive Immersion.

b) f ist keine Einbettung.

c) $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4x^2 + 4x^4 = 0\}$.

d) $\mathrm{Im}(f)$ ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, aber $\mathrm{Im}(f) \setminus \{(0,0)\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

Zu a) f injektiv: Seien $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ mit $\cos\alpha = \cos\beta$, $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Falls $\cos\alpha = \cos\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{3\pi}{2}$. Falls $\cos\alpha = \cos\beta \neq 0$, gilt $\sin\alpha = \sin\beta$ (wegen $\sin 2t = 2\sin t\cos t$). Die Abbildung $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist injektiv auf Intervalle der Länge $2\pi \Rightarrow \alpha = \beta$.

f Immersion: $f'(t) = (-\sin t, 2\cos 2t) = (-\sin t, 2\ (1 - 2\sin^2 t)) \neq (0,0)$.

Zu b) f ist keine Einbettung: Betrachte $x_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$. Dann $f(x_n) \to (0,0) = f(\frac{3\pi}{2})$, $n \to \infty$.

Zu c) $x = \cos t$, $y = 2\sin t\cos t \Rightarrow y^2 = 4\sin^2 t\cos^2 t = 4\ (1 - \cos^2 t)\cos^2 t = 4x^2 - 4x^4$. Umgekehrt, sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 - 4x^2 + x^4 = 0$. Ist $x = 0$, so ist $y = 0$ und $(x,y) = f(3\pi/2)$. Ist $x \neq 0$, so ist $y^2 - 4x^2 + 4x^4 = 0 \Leftrightarrow (\frac{y}{2x})^2 + x^2 = 1 \Rightarrow \exists!$ $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \setminus \{\frac{3\pi}{2}\}$ mit $x = \cos t$, $\frac{y}{2x} = \sin t \Rightarrow (x,y) = f(t)$.

Zu d) $\mathrm{Im}(f)$ ist in keiner Umgebung von $(0,0)$ ein Graph über die x-Achse oder y-Achse (Skizze! beachte, dass $f(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) = f(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{n}) = f(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n})$), $\mathrm{Im}(f) \setminus \{(0,0)\}$ ist aber eine Untermannigfaltigkeit. Betrachte $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = y^2 - 4x^2 + 4x^4$. Dann gilt

$$(0,0) = \mathrm{grad}\,\varphi = (-8x + 16x^3, 2y) \Leftrightarrow (x,y) \in \Big\{ \pm (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,0) \Big\}$$

Aber $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ist nicht in $\mathrm{Im}(f) = \varphi^{-1}(0)$ und $(0,0)$ ist nicht im Definitionsbereich von φ. Es folgt, dass 0 ist ein regulärer Wert von φ. Der Satz vom regulären Wert zeigt, dass $\mathrm{Im}(f) \setminus \{(0,0)\} = \varphi^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit von Dimension 1 des $\mathbb{R}^2$ ist.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2.$$

Bestimmen Sie die regulären und kritischen Werte von f. Skizziere die Niveaumengen $f^{-1}(c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Welche topologische Eigenschaft von $f^{-1}(c)$ ändert sich, wenn c einen kritischen Wert durchläuft?

Lösung:

$$J_f(x,y) = (4x\ (x^2+y^2-1), 4y\ (x^2+y^2+1)) \overset{!}{=} (0\quad 0) \Leftrightarrow y = 0\ \wedge\ x \in \{0,1,-1\}$$

also Rang $J_f(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \notin \{(0,0),(1,0),(-1,0)\}$. Es gilt

$$\varphi^{-1}(c)\ \cap\ \{(0,0),(\pm 1,0)\} \neq \emptyset \Leftrightarrow c = f(\pm 1, 0) = -1,\ c = f(0,0) = 0.$$

Die regulären Werte sind $\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ und die kritische Werte sind $\{-1,0\}$. Nun gilt

- $c < -1 \rightsquigarrow f^{-1}(c) = \emptyset$,
- $c = -1 \rightsquigarrow f^{-1}(c) = \{(\pm 1, 0)\}$ (da $f(x,y)+1 = ((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2) \geq 0$),
- $-1 < c < 0 \rightsquigarrow f^{-1}(c)$ besteht aus zwei geschlossenen Kurven um die Punkte $(\pm 1, 0)$
- $c = 0 \rightsquigarrow f^{-1}(c)$ ist eine Lemniskate,
- $c > 1 \rightsquigarrow f^{-1}(c)$ ist eine zusammenhängende Kurve.

Für $c < 0$ ist $f^{-1}(c)$ nicht zusammenhängend, für $c \geq 0$ ist $f^{-1}(c)$ zusammenhängend.