Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 1 – Abgabe: 31. 10. - 3. 11. 2016 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = xye^{-x-y}$.

a) In der Umgebung welcher Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich die Bedingung $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ gemäß dem Satz über implizite Funktionen durch eine C^1–Funktion $g : x \mapsto y(x)$ bzw. $\tilde{g} : y \mapsto x(y)$ auflösen?

b) Berechnen Sie jeweils $dg(x_0)$ bzw. $d\tilde{g}(y_0)$.

Zeichnen sie eine qualitative Skizze der Höhenlinien von f. Die Ergebnisse von a) und b) sind dabei hilfreich!

Aufgabe 2 **4 Punkte**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := (2e^x - x^2, e^y + (x^2 + 1)y)$. Zeigen Sie:

a) f ist bijektiv.

b) f ist ein C^∞-Diffeomorphismus. Was ist $d(f^{-1})(2, 1)$?

Aufgabe 3 **4 Punkte**
Sei $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$. Zeigen Sie:

a) f ist eine injektive Immersion.

b) f ist keine Einbettung.

c) $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4x^2 + 4x^4 = 0\}$.

d) $\mathrm{Im}(f)$ ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, aber $\mathrm{Im}(f) \setminus \{(0, 0)\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2.$$

Bestimmen Sie die regulären und kritischen Werte von f. Skizziere die Niveaumengen $f^{-1}(c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Welche topologische Eigenschaft von $f^{-1}(c)$ ändert sich, wenn c einen kritischen Wert durchläuft?