**Analysis III – Winter 2016/17**
**Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann**
**Serie 10 mit Musterlösungen**

---

**Aufgabe 1** **4 Punkte**

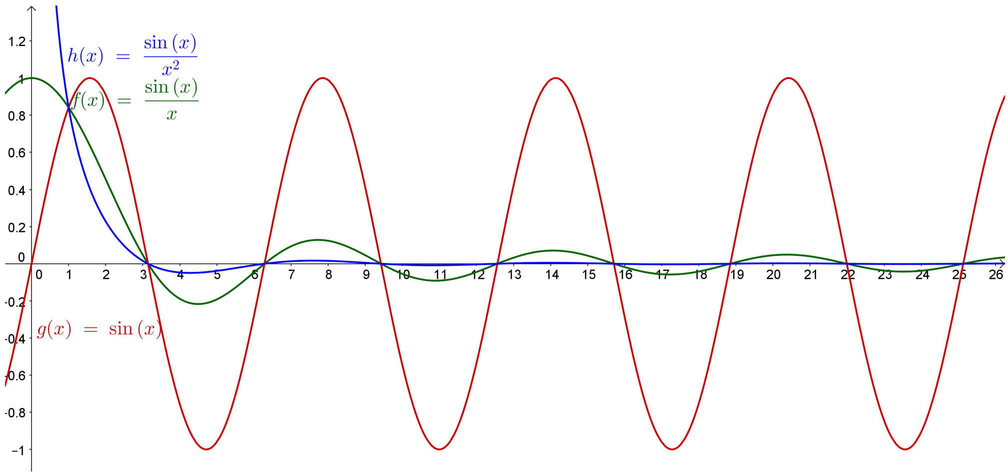
Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

für $\alpha \leqslant 0$ und $\alpha \geqslant 2$ weder als uneigentliches Riemann-Integral noch als Lebesgue–Integral, für $0 < \alpha \leqslant 1$ als uneigentliches Riemann-Integral aber nicht als Lebesgue-Integral, für $1 < \alpha < 2$ als Lebesgue–Integral und absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral existiert.

**Lösung:**

Die Funktion hat einerseits eine Polstelle bei $x = 0$ für $\alpha > 0$ und andererseits interessiert das Verhalten für $x \to \infty$. Die entscheidenden Grenzfälle erhält man bei $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$, die in der folgenden Graphik dargestellt sind:




$x \in (0, \frac{\pi}{2}]$: Da $g(x) = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ ist $g$ mit $g(0) = 1$ eine stetige Funktion und somit über den kompakten Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ beschränkt. Genauer gilt

$$0 < \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \leqslant g(x) = \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 < +\infty.$$

Daraus folgt

$$0 < \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} x^{-\alpha+1} \leqslant \frac{\sin x}{x^\alpha} \leqslant x^{-\alpha+1} < +\infty.$$

Zusammen mit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-\alpha+1} dx = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha} - \lim_{x\to 0} x^{2-\alpha}\right], & \alpha \neq 2 \\ \ln\frac{\pi}{2} - \lim_{x\to 0} \ln x, & x = 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha}, & \alpha < 2 \\ +\infty, & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

impliziert das, $x^{-\alpha}\sin x$ integrierbar ist auf $(0,\frac{\pi}{2}]$ für $\alpha < 2$ und nicht integrierbar für $\alpha \geq 2$. Da die Funktion in dem Bereich eine positive stetige Funktion ist, macht hier Riemann und Lebesgue-integrierbar kein Unterschied.

**$x \to \infty$:** Für $\alpha \leq 0$ gilt

$$\left|\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx - \int_0^{\pi(n-1)} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| = \left|\int_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| \overset{\text{k.Vorz.wechsel}}{=} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$$
$$\overset{n\text{ groß},\alpha\leq 0}{\geq} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\sin x| dx = 2.$$

Wäre die Funktion uneigentlich Riemann-integrierbar, so müsste sie die Integrale mit $\pi n$ als obere Grenze konvergieren und insbesondere Cauchyfolgen sein. Dann müsste aber der obige Grenzwert gegen 0 konvergieren, was er nicht tut. Damit ist $x^{-\alpha}\sin x$ für $\alpha \leq 0$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar. Da diese Funktionen stetig sind, folgt damit auch, dass diese Funktionen nicht Lebesgue-integrierbar sind für $\alpha \leq 0$.

Sei $\alpha > 0$: Wir beweisen, dass das uneigentliche Regelintegral existiert. Sei

$$f(s) = \int_0^s \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx.$$

Wir müssen beweisen, dass $f(s)$ einen Grenzwert besitzt für $s \to +\infty$, oder $f(s)$ hat die Cauchy-Eigenschaft für $s \to +\infty$, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $R > 0$ mit $\big|f(s) - f(t)\big| < \epsilon$ für alle $s, t > R$.
Sei $R > 0$, $R < s < t < +\infty$, dann

$$\big|f(s) - f(t)\big| = \left|\int_s^t \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx\right| = \left| -\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_s^t + \alpha \int_s^t \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\, dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{s^\alpha} + \frac{1}{t^\alpha} + \alpha\int_s^t \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx = \frac{2}{s^\alpha} \leqslant \frac{2}{R^\alpha} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

dies bedeutet, dass das uneigentliche Regelintegral existiert.
Für das Lebesgue-Integral müssen wir die Beträge untersuchen. Sei

$$a_n(\alpha) = \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

dann gilt:

$$2\big(\pi(n-1)\big)^{-\alpha} = \big(\pi(n-1)\big)^{-\alpha} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\sin x|\, dx \leq a_n(\alpha)$$
$$\leqslant \big(\pi n\big)^{-\alpha} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\sin x|\, dx = 2\big(\pi n\big)^{-\alpha} \quad \text{für } \alpha \leqslant 0, \quad (1)$$

$$2\big(\pi n\big)^{-\alpha} = \big(\pi n\big)^{-\alpha} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\sin x|\, dx \leqslant a_n(\alpha)$$
$$\leqslant \big(\pi(n-1)\big)^{-\alpha} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\sin x|\, dx = 2\big(\pi(n-1)\big)^{-\alpha}$$
$$\text{für } \alpha > 0 \text{ und, wenn } \alpha \geqslant 2,\ n > 1. \tag{2}$$

Außerdem
$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\, dx = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(\alpha). \tag{3}$$

Für $\alpha > 1$ ist $a_n(\alpha) \leq 2\big(\pi(n-1)\big)^{-\alpha}$ und die Reihe (3) konvergiert und $x \mapsto \frac{\sin x}{x^{\alpha}}$ ist absolut uneigentlich integrierbar und somit auch Lebesgue-integrierbar. Für $0 < \alpha < 1$ ist $a_n(\alpha) \geq 2\big(\pi n\big)^{-\alpha}$ und die Reihe (3) divergiert bestimmt gegen unendlich. Also ist $x \mapsto \frac{\sin x}{x^{\alpha}}$ nicht absolut uneigentlich integrierbar und somit auch nicht Lebesgue-integrierbar.

Abbildung 1: Zusammenfassung der Integrierbarkeitsergebnisse

| | $\big(0, \frac{\pi}{2}\big]$ | $\big[\frac{\pi}{2}, \infty\big)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| uneigentlich Riemann-integrierbar | $\alpha < 2$ | $\alpha > 0$ | $0 < \alpha < 2$ |
| Lebesgue-integrierbar | $\alpha < 2$ | $\alpha > 1$ | $1 < \alpha < 2$ |

**Aufgabe 2** **4 Punkte**

a) Sei $a > 0$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^s e^{-ax}$ Lebesgue-integrierbar? Berechnen Sie:
$$\int_0^{\infty} x^s e^{-ax}\, dx = \Gamma(s+1) a^{-s-1}.$$

b) Benutzen Sie die Entwicklung $\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$ und den Satz von Beppo Levi um zu zeigen, dass für $s > 1$ gilt:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, d\lambda_1\,.$$

**Lösung:**
**Zu a):** Auf $[1, +\infty)$ ist $f$ für alle $s$ integrierbar, da $|x^s e^{-ax}| \leq C e^{-ax/2}$ mit geeignetem $C > 0$. Auf $(0, 1)$ ist $e^{-ax}$ beschränkt, $0 < c' \leq e^{-ax} \leq c'' < \infty$; deshalb $f \in \mathcal{L}^1(0,1) \Leftrightarrow x^{\operatorname{Re} s} \in \mathcal{L}^1(0,1) \Leftrightarrow \operatorname{Re} s > -1$.
$$\int_0^{\infty} x^s e^{-ax} dx \overset{y=ax}{=} \frac{1}{a^{s+1}} \int_0^{\infty} y^s e^{-y} dy = \frac{\Gamma(s+1)}{a^{s+1}}.$$

**Zu b):** Für $x > 0$ gilt
$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = x^{s-1} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1} e^{-nx}.$$

Diese Reihe kann für $\operatorname{Re} s > 1$ gliedweise integriert werden:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx \overset{y=nx}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left(\frac{y}{n}\right)^{s-1} e^{-y}\frac{dy}{n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s}\,.$$

Wir haben benutzt, dass für eine Folge $(f_k)$ in $L^1(X,\mu)$ mit $\sum_{k=1}^\infty \int |f_k|\,d\mu < +\infty$, konvergiert die Reihe $f := \sum_{k=1}^\infty f_k$ fast überall und

$$\int f\,d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int f_k\,d\mu. \tag{4}$$

Beweis: Nach Beppo-Levi gilt

$$\int \sum_{k=1}^\infty |f_k|\,d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int |f_k|\,d\mu < \infty$$

also $\sum_{k=1}^\infty |f_k|$ ist integrierbar und damit endlich fast überall. Die Folge $(\sum_{k=1}^n f_k)_n$ hat die integrierbare Majorante $\sum_{k=1}^\infty |f_k|$ und $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^\infty f_k$. Nach Lebesgue folgt (4). $\square$

**Aufgabe 3** **4 Punkte**

Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad \text{für } x>0.$$

a) Zeigen Sie für $x>0$:

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{\varphi(x,s)}ds\,, \quad \text{wobei } \varphi(x,s) = x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$$

(Tipp: Substitution $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$)

b) Sei $x>0$. Zeigen Sie

i) $\varphi(x,s) \leqslant -\frac{s^2}{2}$ für alle $s \in (-\sqrt{x}, 0]$ und

ii) $\varphi(x,s) \leqslant \varphi(1,s)$ für alle $s>0$ und $x \in [1,\infty)$.

(Tipp: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,s) = \Phi(\frac{s}{\sqrt{x}})$, wobei $\Phi(u) = \log(1+u) - \frac{u}{2} - \frac{u}{2(1+u)}$ für $u>-1$)

c) Zeigen Sie unter Benutzung der Formel $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}ds = \sqrt{2\pi}$ und des Satzes über dominierte Konvergenz, dass

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}} = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

Kommentar: Letzteres ist die *Stirlingformel*, geschrieben auch

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,, \quad \text{für } n\to\infty.$$

**Lösung:**
**Zu a):** Die Substitution $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow t = s \cdot \sqrt{x} + x$ ergibt

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-s\sqrt{x}-x} \left(s \cdot \sqrt{x} + x\right)^x \sqrt{x} ds \\ &= e^{-x} x^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-s\sqrt{x}} \left(\frac{s}{\sqrt{x}} + 1\right)^x ds \\ &= \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{\log\left(\frac{s}{\sqrt{x}}+1\right)^x - s\sqrt{x}} ds \overset{\log a^x = x \log a}{=} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{\varphi(x,s)} ds\end{aligned}$$

**Zu b) i):** Nach dem Satz von Taylor mit Lagrange-Restglied (in $\mathbb{R}$) gibt es ein $\theta_u$ zwischen 0 und $u$, so dass

$$\begin{aligned}\log(1+u) &= \log 1 + \frac{1}{1!} \left[\log(1+u)\right]' u + \frac{1}{2!} \left[\log(1+u)\right]''_{u=\theta_u} u^2 \\ &= 0 + \frac{1}{1} \frac{1}{1+0} u - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\theta_u)^2} u^2 = u - \frac{u^2}{2} \frac{1}{(1+\theta_u)^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \log(1+u) - u = -\frac{u^2}{2} \frac{1}{(1+\theta_u)^2} \leq -\frac{u^2}{2},$$

wenn $(1 \leq \theta_u)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \theta_u \in [-2, 0]$ und damit $u \in [-2, 0] \cap (-1, \infty) = (-1, 0]$. Für $s \in (-\sqrt{x}, 0]$ ist $u = \frac{s}{\sqrt{x}} \in (-1, 0]$ und somit:

$$\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \frac{s}{\sqrt{x}} \leq -\frac{s^2}{2x}.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,s) = x \left[\log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \frac{s}{\sqrt{x}}\right] \overset{x>0}{\leq} -x \frac{s^2}{2x} = -\frac{s^2}{2} \qquad \forall s \in (-\sqrt{x}, 0].$$

**Zu b) ii):** Sei nun $s > 0$ beliebig aber fest gewählt. Wie im Tipp zeigen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,s) &= \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) + x \frac{-\frac{s}{x^{\frac{3}{2}}}}{1 + \frac{s}{\sqrt{x}}} - \frac{s}{2\sqrt{x}} \\ &= \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\frac{s}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{s}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{2} \frac{s}{\sqrt{x}} = \Phi\left(\frac{s}{\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

mit $\Phi(u) = \log(1+u) - \frac{u}{2(1+u)} - \frac{u}{2}, u \geq 0$. $\Phi$ ist differenzierbar auf $[0, \infty)$ und

$$\Phi'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} \frac{1+u-u}{(1+u)^2} - \frac{1}{2} = \frac{2(1+u) - 1 - (1 + 2u + u^2)}{2(1+u)^2} = -\frac{u^2}{2(1+u)^2} \leq 0$$

$\Rightarrow \quad \Phi$ ist monoton fallend mit $\Phi(0) = 0$ für alle $u \in [0, \infty)$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi x}(x,s) \leq 0$ für alle $s > 0, x > 0$

$\Rightarrow \quad \varphi(\cdot, s)$ ist monoton fallend auf $[0, \infty)$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,s) \le \varphi(1,s) \text{ für alle } x \in [1,\infty), s \in [0,\infty)$$

(Entsprechend gilt für ein $x_0 > 0$: $\varphi(x,s) \le \varphi(x_0,s)$ für alle $x \in [x_0,\infty), s \in [0,\infty)$.)

**Zu c):** Für $x \in [1,\infty)$ und $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$f(x,s) = e^{\varphi(x,s)} \mathbb{1}_{(-\sqrt{x},\infty)}(s).$$

Wegen b) gilt

$$f(x,s) \le e^{-\frac{s^2}{2}} \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(s) + (1+s)e^{-s}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s) =: g(s).$$

Die Funktionen $s \mapsto f(x,s)$ werden für alle $x$ von der auf ganz $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktion $g$ dominiert. Nach dem Satz über dominiert Konvergenz kann Integral und Grenzwert vertauscht werden:

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x,s)ds = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\to\infty} f(x,s)ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x} = \sqrt{2\pi} \qquad \text{das heißt } \Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}, \text{ für } x \to \infty.$$

Weiterhin gilt $\Gamma(n+1) = n!$ und somit

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \text{ für } n \to \infty.$$

**Zusatzaufgabe** **+4 Punkte**

(Mengen vom Cantorschen Typ)

Ausgehend vom kompakten Intervall $I = [0,1]$ nehmen wir nacheinander offene Intervalle heraus. Zunächst wird ein in der Mitte gelegenes offenes Teilintervall $I_{11}$ herausgenommen, dann aus jedem der beiden Reste ein Mittelstück $I_{21}$ bzw. $I_{22}$, darauf aus jedem der verbleibenen vier Reste ein Mittelstück $I_{31}$, $I_{32}$, $I_{33}$, $I_{34}$ usw. Die Vereinigung $G$ aller $I_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$, ist offen. Die kompakte Restmenge $C = I \setminus G$ wird als *Menge vom Cantorschen Typ* bezeichnet.

Sei $0 < \alpha \leq 1/3$. Wählt man $\lambda_1(I_{ij}) = \alpha^i$ für $j = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$, so bezeichnet man mit $G_\alpha$ und $C_\alpha$ die erhaltenen Mengen. Setzt man $\alpha = 1/3$, so spricht man von *der* Cantorschen Menge.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen $C_\alpha$ nirgends dicht sind (d.h. jedes Intervall ein zu $C_\alpha$ disjunktes Intervall enthält).

b) Berechnen Sie $\lambda_1(C_\alpha)$.

**Lösung:**

**Zu a):** Nach dem $n$-ten Schritt erhalten wir die abgeschlossene Menge

$$C_\alpha^n = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} I_{ij},$$

die als Vereinigung von $2^n$ abgeschlossenen disjunkten Intervallen $C_k^n$ dargestellt werden kann, wobei $\lambda_1(C_k^n)$ gleich sind für alle $k = 1, \ldots, 2^n$. Darüber hinaus, $C_\alpha = \cap_{n=1}^\infty C_\alpha^n \subset C_\alpha^n$ für alle $n$. Da alle Intervalle $I_{ij}$ disjunkt sind, gilt

$$\lambda_1(C_\alpha^n) = 1 - \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\alpha^i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(2\alpha)^i = 1 - \alpha\,\frac{1-(2\alpha)^n}{1-2\alpha}$$

und

$$\lambda_1(C_k^n) = \frac{\lambda_1(C_\alpha^n)}{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \alpha\,\frac{1-(2\alpha)^n}{1-2\alpha}\right)$$

Sei jetzt $(a,b)$ ein beliebiges offenes Intervall. Wenn $(a,b) \cap (0,1) = \varnothing$, gibt es nichts zu beweisen. Ansonsten sei $(a',b') = (a,b) \cap (0,1)$. Da $\lim_n \lambda_1(C_k^n) = 0$, gibt es $n$ mit $\lambda_1(C_k^n) < b' - a'$, d.h. keines der Intervalle $C_k^n$ enthält das Intervall $(a',b')$. Da alle $C_k^n$ disjunkt sind, gilt $(a',b') \setminus C_\alpha^n \neq \varnothing$. Sei $x \in (a',b') \setminus C_\alpha^n$. Da diese Menge offen ist, gibt es ein Intervall $x \in (c,d) \subset (a',b') \setminus C_\alpha^n \subset (a,b) \setminus C_\alpha$.

**Zu b):**

$$C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n, \quad C_\alpha^n \supset C_\alpha^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1(C_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \lambda_1(C_\alpha^n) = \frac{1-3\alpha}{1-2\alpha}.$$