

Aufgabe 1

4 Punkte

Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

für $\alpha \leq 0$ und $\alpha \geq 2$ weder als uneigentliches Riemann-Integral noch als Lebesgue-Integral, für $0 < \alpha \leq 1$ als uneigentliches Riemann-Integral aber nicht als Lebesgue-Integral, für $1 < \alpha < 2$ als Lebesgue-Integral und absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral existiert.

Aufgabe 2

4 Punkte

- a) Sei $a > 0$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^s e^{-ax}$ Lebesgue-integrierbar? Berechnen Sie:

$$\int_0^\infty x^s e^{-ax} dx = \Gamma(s+1) a^{-s-1}.$$

- b) Benutzen Sie die Entwicklung $\frac{1}{e^x-1} = \sum_{k=1}^\infty e^{-kx}$ und den Satz von Beppo Levi um zu zeigen, dass für $s > 1$ gilt:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} d\lambda_1.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3**4 Punkte**

Die Gammafunktion ist definiert durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ für $x > 0$.

a) Zeigen Sie für $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{\varphi(x,s)} ds, \quad \text{wobei } \varphi(x,s) = x \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$$

(Tipp: Substitution $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$)

b) Sei $x > 0$. Zeigen Sie

i) $\varphi(x,s) \leq -\frac{s^2}{2}$ für alle $s \in (-\sqrt{x}, 0]$ und

ii) $\varphi(x,s) \leq \varphi(1,s)$ für alle $s > 0$ und $x \in [1, \infty)$.

(Tipp: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,s) = \Phi\left(\frac{s}{\sqrt{x}}\right)$, wobei $\Phi(u) = \log(1+u) - \frac{u}{2} - \frac{u}{2(1+u)}$ für $u > -1$)

c) Zeigen Sie unter Benutzung der Formel $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}$ und des Satzes über dominierte Konvergenz, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Kommentar: Letzteres ist die *Stirlingformel*, geschrieben auch

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Zusatzaufgabe**+4 Punkte**

(Mengen vom Cantorsche Typ)

Ausgehend vom kompakten Intervall $I = [0, 1]$ nehmen wir nacheinander offene Intervalle heraus. Zunächst wird ein in der Mitte gelegenes offenes Teilintervall I_{11} herausgenommen, dann aus jedem der beiden Reste ein Mittelstück I_{21} bzw. I_{22} , darauf aus jedem der verbleibenden vier Reste ein Mittelstück $I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34}$ usw. Die Vereinigung G aller I_{ij} , $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$, ist offen. Die kompakte Restmenge $C = I \setminus G$ wird als *Menge vom Cantorsche Typ* bezeichnet.

Sei $0 < \alpha \leq 1/3$. Wählt man $\lambda_1(I_{ij}) = \alpha^i$ für $j = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$, so bezeichnet man mit G_α und C_α die erhaltenen Mengen. Setzt man $\alpha = 1/3$, so spricht man von *der Cantorsche Menge*.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen C_α nirgends dicht sind (d.h. jedes Intervall ein zu C_α disjunktes Intervall enthält).

b) Berechnen Sie $\lambda_1(C_\alpha)$.