Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 11 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei $a > 0$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^s e^{-ax^2}$ Lebesgue-integrierbar?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty x^s e^{-ax^2}\, dx.$

b) Sei $a > 0$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$ Lebesgue-integrierbar?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx.$

Lösung:
Zu a): Diese Aufgabe kann einfach durch Substitution zurückgeführt werden auf die Aufgabe 2 a) auf dem 10. Blatt.

$$\int_0^\infty x^s e^{-ax^2} dx \overset{\substack{y=x^2 \\ dy=2xdy}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\frac{s-1}{2}} e^{-ay} y \overset{10,\ 2a}{=} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}+1\right) a^{-\frac{s-1}{2}-1}$$
$$= \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) a^{-\frac{s+1}{2}}$$

Damit ist die Funktion Lebesgue-integrierbar für

$$-1 < \mathrm{Re}\left(\frac{s-1}{2}\right) = \frac{\mathrm{Re}\, s - 1}{2} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Re}\, s > -1$$

Zu b): Die Bereiche $[0,1]$ und $[1,\infty]$ müssen getrennt untersucht werden, je nach Vorzeichen von b ergeben sich verschiedene Vergleichsmöglichkeiten:

	$0 \le x \le 1$	$1 \le x < \infty$
$b \ge 0$	$2 \ge 1 + x^b \ge 1$	$2x^b \ge 1 + x^b \ge 1$
	$\frac{x^{a-1}}{2} \le \frac{x^{a-1}}{1+x^b} \le x^{a-1}$	$\frac{x^{a-b-1}}{2} \le \frac{x^{a-1}}{1+x^b} \le x^{a-b-1}$
$b \le 0$	$2x^b \ge 1 + x^b \ge x^b$	$2 \ge 1 + x^b \ge 1$
	$\frac{x^{a-b-1}}{2} \le \frac{x^{a-1}}{1+x^b} \le x^{a-b-1}$	$\frac{x^{a-1}}{2} \le \frac{x^{a-1}}{1+x^b} \le x^{a-1}$

Die Integrale der Vergleichsfunktionen über beide Bereiche sind:

$$\int_0^1 x^{a-1} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} x^a\big|_0^1, & a \neq 0 \\ \ln x\big|_0^1, & a = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > 0, \\ \infty, & a \le 0. \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^{a-1}dx = \begin{cases} \frac{1}{a}x^a\Big|_1^\infty, & a \neq 0 \\ \ln x\Big|_1^\infty, & a = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{|a|}, & a < 0, \\ \infty, & a \geq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^{a-b-1}dx = \begin{cases} \frac{1}{a-b}, & a > b, \\ \infty, & a \leq b \end{cases}, \qquad \int_1^\infty x^{a-b-1}dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < b, \\ \infty, & a \geq b \end{cases}$$

Damit ist $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$ Lebesgue-integrierbar auf den Bereichen genau dann wenn:

	$0 \leq x \leq 1$	$1 \leq x < \infty$
$b \geq 0$	$a > 0$	$a < b$
$b \leq 0$	$a > b$	$a < 0.$

Insgesamt ergibt sich, dass $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$ Lebesgue-integrierbar ist genau dann, wenn $0 < a < b$ oder $0 > a > b$. Der zweite Fall lässt dich dabei durch Erweitern mit x^{-b} in den ersten Fall überführen:

$$0 > a > b: \quad \frac{x^{a-1}}{1+x^b} = \frac{x^{a-b-1}}{1+x^{-b}}, \quad -b \overset{a<0}{>} -b + a = a - b \overset{a>b}{>} 0.$$

Für den Wert des Integrals ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}dx = \frac{\pi}{b\sin\left(\frac{a}{b}\pi\right)}.$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}(1-x) \text{ für } x \in [0,1).$$

Wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz auf $[0,1)$ an und berechnen Sie die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die angegebene Reihendarstellung mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \overset{|-x|<1}{=} \sum_{l=0}^{\infty}(-x)^l = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\end{aligned}$$

Diese Umformung zeigt uns, dass die rationale Funktion als Reihe mit *positiven* Summanden $a_k(x)$ bzw. als Folge von (streng) monoton steigenden Partialsummen $f_n(k) := \sum_{k=0}^{n} a_k(x)$ geschrieben werden kann. Die Funktionen f_n sind stetig und somit integrierbar und konvergieren gegen die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Damit kann der Satz von der monotone Konvergenz angewendet werden und wir erhalten:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)\big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x)dx \overset{\text{S.v.mon.Konv.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x)dx\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^{2k}(1-x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\int_0^1 x^{2k}dx - \int_0^1 x^{2k+1}dx\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\bigg|_0^1 - \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\bigg|_0^1\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l+1}}{l} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l}\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\Big)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt\ ,$$

differenzierbar sind mit $f' + g' = 0$ und $f + g = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Folgern Sie für $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,d\lambda_1 = \sqrt{\pi}\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\,d\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} t^{2n}\,d\lambda_1 = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,a^{-n-\frac{1}{2}}\ .$$

Lösung:
Zu a): f ist offensichtlich differenzierbar (Fundamentalsatz der Differential–und Integralrechnung) und $f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\Big) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$

hat eine integrierbare Majorante auf $[0,1]$ eine Konstante (für $t \in [0,1]$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $|xe^{-x^2(1+t^2)}| \leqslant |xe^{-x^2}|$ und $x \mapsto xe^{-x^2}$ ist beschränkt auf $\mathbb{R}$). Deshalb ist g differenzierbar und

$$g'(x) = (-2x)e^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-y^2}\,dy \quad (tx = y).$$

Daraus folgt $f' + g' = 0 \rightsquigarrow f + g \equiv f(0) + g(0) = g(0) = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Zu b): Es gilt

$$\Big|\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\Big| \leqslant \frac{1}{1+t^2} \in \mathcal{L}^1([0,1])$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$. Nach Lebesgue

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} g(x) = \int_0^1 \Big(\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\Big)\,dt = 0.$$

Man erhält

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \Big(\lim_{x\longrightarrow\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\Big)^2 = \Big(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\Big)^2$$

$$\rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \rightsquigarrow h(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,\cdot$$

(Substitution: $\sqrt{\lambda}t = u$). Sei $\lambda_0 > 0$ fest und $\varepsilon > 0$ mit $\lambda_0 > \varepsilon$.

$$\Big|\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(e^{-\lambda t^2})\Big| = t^{2k}e^{-\lambda t^2} \leqslant t^{2k}e^{-\varepsilon t^2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}\,, \quad \lambda > \varepsilon$. daraus folgt, daß $h(\lambda)$ unendlich oft differenzierbar in λ_0 ist und daß

$$h^{(k)}(\lambda_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_0 t^2}(-t^2)^k\,dt.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}h(\lambda) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \sqrt{\pi}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\lambda^{-k-\frac{1}{2}}.$$

(Induktion).

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

a) Beweisen Sie, dass $(1-t/k)^k \leqslant e^{-t}$ für $0 \leqslant t \leqslant k$, und benutzen Sie diese Ungleichung und den Satz von Lebesgue um zu zeigen, dass

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty}\int_0^k (1-\tfrac{t}{k})^k\,t^{x-1}\,dt\,.$$

b) Bestimmen Sie durch sukzessive partielle Integrationen die Gaußsche Darstellung der Gammafunktion:

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{k^x k!}{x(x+1)\ldots(x+k)}\,.$$

c) Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$ unter Verwendung der Aufgabe 3b), und einer Substitution. Leiten Sie mit Hilfe von b) für $x = 1/2$ die *Wallissche Produktformel* her:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^2}{1\cdot 3}\,\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Hinweis: Für die übliche Herleitung siehe Skript S. 69 oder Königsberger, Analysis I, §11.5.

Lösung:
Zu a): Wegen $e^x \geq 1+x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung auch für $x = -\frac{t}{k}$.

$$\left(1-\frac{t}{k}\right)^k \chi_{[0,k]}(t)t^{x-1} \leq e^{-t}t^{x-1}$$

und $e^{-t}t^{x-1}$ ist auf $[0,\infty)$ integrierbar (siehe Definition von der Γ-Funktion). Außerdem gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{t}{k}\right)^k \chi_{[0,k]}t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1} \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Damit impliziert der Satz über dominierte Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k \left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \left(1-\frac{t}{k}\right)^k \chi_{[0,k]}(t)t^{x-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx =: \Gamma(x).$$

Zu b):

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^k \left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt = \left(1-\frac{t}{k}\right)^k \frac{1}{x}t^x\Bigg|_{t=0}^{t=k} - \int_0^k k\left(1-\frac{t}{k}\right)^{k-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\frac{t^x}{x}dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^k \left(1-\frac{t}{k}\right)^{k-1} t^x dt = \frac{1}{x(x+1)}\frac{k-1}{k}\int_0^k \left(1-\frac{t}{k}\right)^{k-2} t^{x+1}dt \\
&= \cdots = \frac{(k-1)!}{k^{k-1}}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k-1)}\int_0^k t^{x+k-1}dt \\
&= \frac{(k-1)!}{k^{k-1}}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k-1)}\,\frac{t^{x+k}}{x+k}\Bigg|_{t=0}^{t=k} = \frac{k!k^x}{x(x+1)\cdots(x+k)}.
\end{aligned}$$

Zu c): Durch die Substitution $t^2 = s$ in

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{folgt} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k}k!}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k\right)} = \lim_{k\to\infty}\frac{2\sqrt{k}\cdot 2\cdot 4\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} \\
&\Rightarrow \quad \pi = \lim_{k\to\infty}\frac{4k\left(2\cdot 4\cdots(2k)\right)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2k-1)^2\cdot(2k+1)\cdot(2k+1)} \\
&\overset{\lim_{k\to\infty}\frac{4k}{2k+1}=2}{\Longrightarrow} \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2k)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2k-1)^2\cdot(2k+1)}
\end{aligned}$$