Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 11 – Abgabe: 23. 1. - 26. 1. 2017 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei $a > 0$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^s e^{-ax^2}$ Lebesgue-integrierbar?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty x^s e^{-ax^2}\,dx.$

b) Sei $a > 0$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$ Lebesgue-integrierbar?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx.$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}(1-x) \text{ für } x \in [0,1).$$

Wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz auf $[0,1)$ an und berechnen Sie die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\Big)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt\ ,$$

differenzierbar sind mit $f' + g' = 0$ und $f + g = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Folgern Sie für $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,d\lambda_1 = \sqrt{\pi}\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\,d\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} t^{2n}\,d\lambda_1 = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,a^{-n-\frac{1}{2}}\ .$$

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

a) Beweisen Sie, dass $(1-t/k)^k \leqslant e^{-t}$ für $0 \leqslant t \leqslant k$, und benutzen Sie diese Ungleichung und den Satz von Lebesgue um zu zeigen, dass

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \int_0^k (1-\tfrac{t}{k})^k \, t^{x-1}\, dt\,.$$

b) Bestimmen Sie durch sukzessive partielle Integrationen die Gaußsche Darstellung der Gammafunktion:

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^x k!}{x(x+1)\dots(x+k)}\,.$$

c) Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$ unter Verwendung der Aufgabe 3b), und einer Substitution. Leiten Sie mit Hilfe von b) für $x = 1/2$ die *Wallissche Produktformel* her:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3}\,\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Hinweis: Für die übliche Herleitung siehe Skript S. 69 oder Königsberger, Analysis I, §11.5.