Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 12 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass für jedes $A > 0$ die Funktion $f : (0, A) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ integrierbar ist. Folgern Sie, dass

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \left(\int_0^A e^{-xy} \sin x\, dx \right) dy\,.$$

b) Bestimmen Sie durch Grenzübergang $A \longrightarrow \infty$ das uneigentliche Riemann-Integral als

$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,,$$

und leiten Sie her, dass

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,, \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Hinweis: Die letzten beiden Integrale sind Lebesgue–Integrale. Das Letzte wird im Beweis des Satzes von Wiener–Ikehara benötigt, der die Basis für den Wienerschen Beweis des Primzahlsatzes ist.

Lösung:

Zu a) Für $x > 0$ ist $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\, dy = -\frac{1}{x}\, e^{-xy}\Big|_{y=0}^{y=\infty} = \frac{1}{x}\cdot$ Daraus folgt

$$\int_0^A \int_0^\infty |e^{-xy} \sin x|\, dy\, dx = \int_0^A |\sin x| \Big(\int_0^\infty e^{-xy}\, dy \Big) dx = \int_0^A \frac{|\sin x|}{x}\, dx < \infty.$$

(Wie üblich setzen wir die Funktion $(0, A] \ni x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ stetig mit 1 in Null fort.) Nach dem Satz von Fubini–Tonelli ist f integrierbar. Man kann den Satz von Fubini anwenden und erhält:

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^A e^{-xy} \sin x\, dx \Big) dy = \int_0^A \Big(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\, dy \Big)\, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Zu b) Durch partielle Integration

$$\int_0^A e^{-xy} \sin x\, dx = -e^{Ay} \cos A + 1 - y e^{-Ay} \sin A - \int_0^A y^2 e^{-xy} \sin x\, dx\,,$$

$$(1 + y^2) \int_0^A e^{-xy} \sin x\, dx = -e^{Ay} \cos A + 1 - y e^{-Ay} \sin A\,.$$

Daraus folgt, wegen $|e^{-Ay}| \leqslant e^{-y}$ für $A > 1$:

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^A e^{-xy}\sin x\,dx\Big| &\leqslant \frac{1}{1+y^2}(1+e^{-Ay}|\cos A| + ye^{-Ay}|\sin A|)\\ &\leqslant \frac{1}{1+y^2}(1+e^{-y}+ye^{-y}) \in \mathcal{L}^1(0,\infty).\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue erhält man durch Grenzübergang $A \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{A\longrightarrow\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx\\ &= \int_0^\infty \lim_{A\longrightarrow\infty}\frac{1}{1+y^2}(1-e^{-Ay}\cos A - ye^{-Ay}\sin A)\,dy\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan y\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Bemerkung: das Integral existiert nur als uneigentliches Regelintegral und nicht als Lebesgue-Integral.
Da $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$ ist $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ stetig auf $\mathbb{R}$, wenn im Nullpunkt der Funktionswert als $\dfrac{1}{2}$ festgesetzt wird. Das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|1-\cos x|}{x^2}\,dx$ ist absolut konvergent, da es in Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ eine konvergente Majorante besitzt. (Daher existiert $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ auch als Lebesgue–Integral.)
Durch partielle Integration auf (ε, A) und Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, $A \to \infty$ erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = (1-\cos x)\big(-\tfrac{1}{x}\big)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{(1-\cos x)'}{(-x)}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Die letzte Gleichheit folgt unter Verwendung der Identität

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

folgendermaßen (Substitution $y = \frac{x}{2}$, $dx = 2dy$) :

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{4y^2}\cdot 2\,dy = \int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{y^2}\,dy\,.$$

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2^n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie ihre Antworten:

a) Ist f Riemann-integrierbar?

b) Ist f Lebesgue-integrierbar?

Lösung:

Zu a): f ist Riemann-integrierbar. Dazu definieren wir Folgen von Treppenfunktionen, die f von oben und unten approximieren.

$$\varphi_n \equiv 0, \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right] \text{ oder } x \in \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+2}}\right], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ und

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_n(x)dx &= 0 \text{ und} \\ \int_0^1 \psi_n(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \left[\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+2}} - \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+2}}\right)\right] + 1 \cdot \left[\frac{1}{2^{n+1}} - 0\right] \\ &= \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Damit ist f Riemann-integrierbar und das Integral ist $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Bemerkung: Tatsächlich gibt es verschiedene Möglichkeiten zu zeigen, dass f Riemann-integrierbar ist, hier wurde eine anschauliche gewählt.

Zu b): f ist Riemann-integrierbar auf einem beschränkten Intervall und somit auch Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Betrachten Sie

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \\ 0, & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) g ist stetig auf $[0,1]$?

b) g ist stetig auf $[0,1] \cap \mathbb{Q}$?

c) g ist stetig auf $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$?

d) g ist Riemann-integrierbar?

e) g ist Lebesgue-integrierbar?

Lösung:

Zu a): g ist *nicht* stetig auf $[0,1]$: Betrachte zum Beispiel $x = 1$, dann gilt

$$g(1) = g\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1} = 1.$$

Da die irrationalen Zahlen dicht in $[0,1]$ liegen gibt es in jeder Umgebung $(1-\delta, 1]$, $\delta > 0$, eine irrationale Zahl y und somit

$$|g(1) - g(y)| = |1 - 0| = 1.$$

Zu b): g ist *nicht* stetig auf $[0,1] \cap \mathbb{Q}$: Das wurde bereits in a) gezeigt, da $1 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Zu c): g ist stetig auf $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$: Sei $x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Es existiert ein $q_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{q} \leq \varepsilon, \forall q \geq q_0$. Betrachte die Menge

$$M_{q_0} = \left\{ \frac{p}{q} \in [0,1] \;\middle|\; \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \text{ und } q < q_0 \right\}.$$

In M_{q_0} sind nur endlich viele Zahlen und somit existiert ein $\delta > 0$ mit $(x-\delta, x+\delta) \cap M_{q_0} = \emptyset$ und

$$|g(y) - g(x)| = |g(y) - 0| \leq \frac{1}{q_0} \leq \varepsilon, \quad \forall y \in (x-\delta, x+\delta).$$

Zu d): g ist Riemann-integrierbar: $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Menge von Punkten und somit eine Lebesque-Nullmenge. g ist nach c) fast überall stetig und beschränkt durch 1. Also ist g Riemann-integrierbar.

Alternativ hätte man auch hier wieder, wie in Aufgabe 2 Folgen von Treppenfunktionen konstruieren können, deren Integrale gegen 0 konvergieren.

Zu e): Die Riemann-Integrierbarkeit impliziert die Lebesgue-Integrierbarkeit (Probleme tauchen nur bei uneigentlichen Riemannintegralen auf).

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Benutzen Sie die Substitution

$$x^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xu^2}\, du$$

zur Bestimmung der Integrale

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx\,, \quad G(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x^{1/2}}\, dx \quad (t > 0)$$

und folgern Sie durch Grenzübergang $t \to +0$:

$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx = \mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(Fresnelsche Integrale).}$$

Lösung:

Schritt 1: Konvergenz des Integrals $F(t)$. Betrachte für $t > 0$ die Funktion

$$f_t : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad f_t(x) := e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\,.$$

Sie ist integrierbar auf $(0, 1]$, da $x \mapsto e^{-tx} \cos x$ beschränkt ist ($e^{-tx} \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$) und $x \mapsto x^{-1/2}$ integrierbar auf diesem Intervall ist. Sie ist integrierbar auf $[1, \infty)$: $\left|e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\right| \leqslant e^{-tx} \in \mathcal{L}^1([1, \infty))$. Also $f_t \in \mathcal{L}^1((0, \infty))$.

Schritt 2: Anwendung von Fubini-Tonelli. Wir ersetzen im Integranden den Faktor $x^{-1/2}$ durch $\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xu^2}\, du$. Das iterierte Integral

$$F(t) := \int_0^\infty f_t(x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-tx} \cos x \cdot e^{-xu^2}\, du \Big) dx$$

ist endlich. Nach Tonelli ist der Integrand integrierbar und nach Fubini können wir die Integration–Reihenfolge vertauschen:

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-(t+u^2)x} \cos x\, dx \Big) du\,.$$

Um das innere Integral zu berechnen betrachten wir für $a > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos x\, dx = \frac{\cos x - a \cos x}{1 + a^2}\, e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{a}{1 + a^2}\,.$$

Mit $a = t + u^2$ erhalten wir

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{t + u^2}{1 + (t + u^2)^2}\, du\,.$$

Schritt 3: Anwendung von Lebesgue. Für $t \in (0,1)$ gilt

$$\frac{t+u^2}{1+(t+u^2)^2} < \frac{1+u^2}{1+u^4} \in \mathcal{L}^1((0,\infty));$$

wir können daher $t \to 0$ laufen lassen und der Satz von Lebesgue liefert:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} F(t) =& \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{t\to 0} \int_0^\infty \frac{t+u^2}{1+(t+u^2)^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Big(\lim_{t\to 0} \frac{t+u^2}{1+(t+u^2)^2} \Big)\, du \\ =& \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}\, du\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Schritt 4: Stetigkeit der Funktion $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_0^\infty f_t(x)\, dx$. Wir wissen aus Blatt 10, Aufgabe 1, dass das uneigentliche Regelintegral $F(0) = \mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ existiert. Wir zeigen, dass

$$\lim_{t\to 0} F(t) = F(0) = \mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx\,. \tag{2}$$

Das Cauchy–Kriterium zeigt, daß $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0$ mit $\Big| \int_A^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$ Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Skript, Satz 6.4.4) gilt für jedes $t > 0$ und $B > A$,

$$\Big| \int_A^B e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| \leqslant \sup_{x\in[A,\infty)} |e^{-tx}| \Big| \int_A^B \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und durch Limesübergang $B \to \infty$

$$\Big| \int_A^\infty e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Daraus folgt

$$\Big| \int_A^\infty (e^{-tx}-1) \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| \leqslant \Big| \int_A^\infty e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| + \Big| \int_A^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| < \frac{2\,\varepsilon}{3}\,.$$

Der Satz von Lebesgue auf $[0,A]$ impliziert wegen $|e^{-tx}-1| < 2:$

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \int_0^A (e^{-tx}-1) \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx = \int_0^A \lim_{t\to 0} (e^{-tx}-1) \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx = 0 \\ &\Rightarrow \exists\, t(\varepsilon) \quad \forall\, t < t(\varepsilon) : \Big| \int_0^A (e^{-tx}-1) \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Daher gilt für $t < t(\varepsilon)$:

$$\Big| \int_0^\infty (e^{-tx}-1) \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| \leqslant \Big| \int_0^A (e^{-tx}-1) \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| + \Big| \int_A^\infty (e^{-tx}-1) \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx \Big| < \varepsilon$$

Schritt 4: Berechnung des Integrals $\int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}\,du$. Aus (1) und (2) folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}\,du\,.$$

Wir berechnen nun die rechte Seite. Mit der Substitution $u = \frac{1}{x}$ folgt

$$J := \int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}\,du = \int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}\,du$$

also

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

Durch die Substitution $w = x - \frac{1}{x}$, $dw = (1+\frac{1}{x^2})dx$ erhalten wir:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dw}{w^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{w}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}\,.$$

Das zweite Integral $G(t)$ berechnet man analog. $\square$