**Analysis III – Winter 2016/17**
**Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann**
**Serie 12 – Abgabe: 30. 1. - 2. 2. 2017 in den Übungen**

---

**Aufgabe 1** **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass für jedes $A > 0$ die Funktion $f : (0, A) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ integrierbar ist. Folgern Sie, dass

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \left( \int_0^A e^{-xy} \sin x\, dx \right) dy\, .$$

b) Bestimmen Sie durch Grenzübergang $A \longrightarrow \infty$ das uneigentliche Riemann-Integral als

$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\, ,$$

und leiten Sie her, dass

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, , \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}\, .$$

*Hinweis: Die letzten beiden Integrale sind Lebesgue–Integrale. Das Letzte wird im Beweis des Satzes von Wiener–Ikehara benötigt, der die Basis für den Wienerschen Beweis des Primzahlsatzes ist.*

**Aufgabe 2** **3 Punkte**

Sei

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2^n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie ihre Antworten:

a) Ist $f$ Riemann-integrierbar?

b) Ist $f$ Lebesgue-integrierbar?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3** **5 Punkte**

Betrachten Sie

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $g$ ist stetig auf $[0,1]$?

b) $g$ ist stetig auf $[0,1] \cap \mathbb{Q}$?

c) $g$ ist stetig auf $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$?

d) $g$ ist Riemann-integrierbar?

e) $g$ ist Lebesgue-integrierbar?

**Zusatzaufgabe** **+4 Punkte**

Benutzen Sie die Substitution

$$x^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xu^2}\, du$$

zur Bestimmung der Integrale

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx\,, \quad G(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x^{1/2}}\, dx \quad (t > 0)$$

und folgern Sie durch Grenzübergang $t \to +0$:

$$\mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}\, dx = \mathcal{R} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(Fresnelsche Integrale).}$$