Bezeichne $f(z) = \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} > 0$. (Alles funktioniert auch für eine Rotationsfläche $R_f = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = f^2(z)\}$ mit ein beliebiges $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, $f > 0$.)

(a) Sei $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2+y^2-f^2(z)$; dann $F^{-1}(0) = M$.

Wir zeigen, dass 0 ein regulärer Wert für F ist:

$$(x,y,z) \in M \ \& \ \operatorname{grad} F(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} x^2+y^2 = f^2(z) \\ (2x, 2y, -2f\cdot f') = 0 \end{cases}$$

1. Gl $\Rightarrow x = y = 0$ und durch erzetzen in der 1. Gl folgt $f(z) = 0$ $\lightning$ Also gilt $\operatorname{grad} F \neq 0$ auf M.

(b) Die Abbildung $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist eine Immersion:

$$J_\psi(v,u) = \begin{pmatrix} -f(u)\sin v & f'(u)\cos v \\ f(u)\cos v & f'(u)\sin v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beide Minoren $-f\sin v$, $+f\cos v$ können nicht Null sein (ansonsten $(-f\sin v)^2 + (+f\cos v)^2 = 0$ also $f = 0$ $\lightning$).

Wir sehen leicht, dass $\psi(\mathbb{R}^2) \subset M$. Folglich ist $\psi: \mathbb{R}^2 \to M$ glatt und gilt $d\psi(v,u)(\mathbb{R}^2) \subset T_{\psi(v,u)}M$

Beide Räume haben Dim zwei, also

$d\psi(v,u): \mathbb{R}^2 \to T_{\psi(v,u)}M$ ist ein Isomorphismus und ψ ein lokaler Diffeomorphismus.

Definiere $\tilde{\psi}: (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to M$. Dann ist $\tilde{\psi}$ injektiv und $\operatorname{Im}\tilde{\psi} = M \setminus \{(f(u), 0, u) : u \in \mathbb{R}\}$. Um die Inverse von $\tilde{\psi}$ zu bestimmen lösen wir $f(u)\cos v = x$, $f(u)\sin v = y$, $u = z$ woraus $\tilde{\psi}^{-1}(x,y,z) = (\arg(x,y), z)$

$\tilde{\psi}^{-1}$ stetig also $\tilde{\psi}$ ist eine Parametrisierung.

(c) Wegen $\operatorname{grad} F \neq 0$ auf $\partial D = M$ ist D eine glatt berandete Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Die Volumenform (globale Darstellung) ist gegeben durch

$$\omega_M = \frac{\operatorname{grad} F}{\|\operatorname{grad} F\|} \lrcorner\, dx\wedge dy\wedge dz =$$

$$= \frac{1}{2f\sqrt{1+f'^2}}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\, dy\wedge dz - \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\wedge dz + \frac{\partial F}{\partial z}\, dx\wedge dy\right)$$

$$= \frac{1}{f\sqrt{1+f'^2}}\left(x\, dy\wedge dz - y\, dx\wedge dz - 2f\cdot f'\, dx\wedge dy\right) \quad (*)$$

Nach Def 12.4.1 (d) müssen wir überprüfen, dass $\psi^*\omega_M = \lambda\, dv\wedge du$ mit λ eine positive Funktion.
Wenn $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ist, dann ersetzen wir $x = \psi_1$, $y = \psi_2$, $z = \psi_3$ und $dx = d\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \psi_1}{\partial u}\, du = f\cdot(-\sin v)\, dv + f'(u)\cos v\, du$, $dy = d\psi_2 = f\cos v\, dv + f'(u)\sin v\, du$, $dz = du$ in dem Ausdruck von ω_K und erhalten

$$\psi^*\omega_M(v,u) = \underbrace{f(u)\sqrt{1+f'(u)^2}}_{>0}\, dv\wedge du \qquad (**)$$

Folglich ist ψ orientierungserhaltend.

(d) Die globale Darstellung ist $(*)$ und die lokale ist $(**)$.

(e) $$\psi^*\left(\frac{1}{x^2+y^2}\,\omega_M\right) = \psi^*\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot \psi^*\omega_M$$

$$= \frac{1}{\psi_1^2+\psi_2^2}\,\psi^*\omega_M = \frac{1}{f^2}\,\psi^*\omega_M$$

Ist $f = \cosh$, so folgt $1+f'^2 = f^2$ also

$$\psi^*\omega_K = \cosh^2(u)\, dv\wedge du, \quad \psi^*\omega_M \cdot \frac{1}{f^2} = dv\wedge du$$

(a) Da $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist, besitzt

$$\omega^{\lambda v} = \left(\frac{\lambda x z}{1+x^2} + y\right) dx + x\,dy + \left(\log(1+x^2) - \lambda z\right) dz$$

genau dann ein Potential auf $\mathbb{R}^3$, wenn $d\omega^{\lambda v} = 0$ ist.

(Hier benutzt man das Lemma von Poincaré.)

Man berechnet

$$d\omega^{v_\lambda} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda x z}{1+x^2} + y\right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda x z}{1+x^2} + y\right) dz \wedge dx$$

$$+ dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\log(1+x^2) - \lambda z\right) dx \wedge dz$$

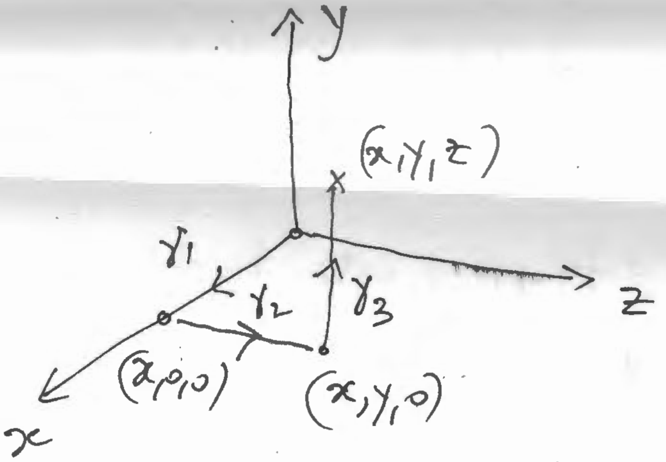
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\log(1+x^2) - \lambda z\right) dy \wedge dz$$

$$= dy \wedge dx + \frac{\lambda x}{1+x^2} dz \wedge dx + dx \wedge dy + \frac{2x}{1+x^2} dx \wedge dz$$

$$= \frac{(2-\lambda)}{1+x^2}\, dx \wedge dz$$

Also existiert genau für $\lambda = 2$ ein Potential.

Ein Potential (Stammfkt.) findet man mit Hilfe des Satzes 12.6.4 als $f(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \omega$ wobei wir auf einem beliebigen Weg mit ~~Anfangs~~ Anfangspunkt $(0,0,0)$ und Endpunkt (x,y,z) integrieren. Wir wählen z.B. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, wobei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,
$\gamma_1(t) = (tx, 0, 0)$, $\gamma_2(t) = (x, ty, 0)$, $\gamma_3(t) = (x, y, tz)$



$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = 0 + xy + z\log(1+x^2) - z^2$$

(Hier ausführlich vorrechnen)

Eine andere Möglichkeit ist „im Kopf" zu integrieren:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(\frac{2xz}{1+x^2} + y\right)dx + x\,dy + \\ + \left(\log(1+x^2) - 2z\right)dz$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xz}{1+x^2} + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \log(1+x^2) - 2z$$

1\. Gl $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = z\log(1+x^2) + xy + g(y,z)$

2\. Gl $\Rightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z) + C$

3\. Gl $\Rightarrow$ $h'(z) = -2z \Rightarrow h(z) = -z^2$

Also $f(x,y,z) = z\log(1+x^2) + xy - z^2 + C$.

(b) Da ω^{V_2} ein Potential besitzt, berechnet man nach Satz 12.6.3:

$$\int_\gamma \omega^{V_2} = \int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,-2,5) - f(1,0,5)$$

$$= 5\log 2 - 2 - 25 - (5\log 2 - 25) = -2. \quad \blacksquare$$

<u>Übung</u> (a) $B_R(0) \ni x \mapsto \|x\|_2^{-\alpha}$ ist in $\mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \alpha < n$

Berechne $\int_{B_R(0)} \|x\|_2^{-\alpha} \, d\lambda_n$

(b) $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mu : K \to \mathbb{R}$ beschränkt, meßbar

Dann $\exists \int_K \frac{\mu(x)}{\|x-a\|_2^\alpha} \, d\lambda_n$ für jeden $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha < n$.

<u>Lösung</u> (a) Wie üblich setzen wir $\|x\|^{-\alpha}$ beliebig (z.B. mit 0) in 0 fort. Da $\|x\|^{-\alpha}$ rotationssymmetrisch ist $\rightsquigarrow$ $\int_{B_R(0)} \|x\|^{-\alpha} \, d\lambda_n = n\omega_n \int_0^R r^{-\alpha} r^{n-1} \, dr = n\omega_n \int_0^R r^{n-\alpha-1} \, dr$

Das letzte Integral ist endlich $\Leftrightarrow n-\alpha-1 > -1 \Leftrightarrow n > \alpha$

denn: $\int_0^R r^\beta \, dr = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^R r^\beta \, dr = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\beta+1} r^{\beta+1} \Big|_\varepsilon^R = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \frac{R^{\beta+1} - \varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1}$

Anal falls $\beta \neq -1$; $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{\beta+1} = \begin{cases} 0, & \beta+1 > 0 \\ \infty, & \beta+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \beta > -1 \\ \infty, & \beta < -1 \end{cases}$

also $\int_0^R r^\beta \, dr = \begin{cases} \frac{1}{\beta+1} R^{\beta+1}, & \beta > -1 \\ \infty, & \beta < -1 \end{cases}$

Für $\beta = -1 \rightsquigarrow \int_0^R \frac{1}{r} \, dr = \log r \Big|_0^R = \infty$

(b) Sei $M > 0$ mit $|\mu| \leq M$. Also $\frac{|\mu|}{\|x-a\|^\alpha} \leq \frac{M}{\|x-a\|^\alpha}$ und es reicht $\|x-a\|^{-\alpha} \in \mathcal{L}^1(K)$ zu zeigen.

Sei nun $R > 0$ mit $K \subset B_R(a) \rightsquigarrow$

$$\|x-a\|^{-\alpha} \mathbb{1}_K \leq \|x-a\|^{-\alpha} \mathbb{1}_{B_R(a)}$$
$$= \left(\frac{1}{\|\xi\|^\alpha} \mathbb{1}_{B_R(0)} \right) \circ T$$

wobei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x - a$. Trafosatz $\rightsquigarrow$

$$\int_{B_R(a)} \|x-a\|^{-\alpha} \, d\lambda_n = \int_{B_R(0)} \|\xi\|^{-\alpha} \, d\lambda_n < \infty \text{ falls } \alpha < n.$$

Übung Bestimme den Flächeninhalt der (a) Wendelfläche (b) Viviani-Fläche.

Lösung (a) $W = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : (\varphi, r) \in \mathbb{R}^2\}$

Parametrisierung $[0,4\pi] \times (0,2) \ni (\varphi, r) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$

Volumenform (Blatt 7): $\omega_W = \sqrt{1+r^2}\, d\varphi \wedge dr$

$$A(W) = \int_0^{4\pi}\int_0^2 \sqrt{1+r^2}\, dr\, d\varphi = 4\pi \int_0^2 \sqrt{1+r^2}\, dr \overset{r=\sinh z}{=}$$

$$= 4\pi \int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 z\, dz = 4\pi\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(2) + \tfrac{1}{2}\cosh(\operatorname{arsinh}(2))\right)$$

$$= 2\pi\left(\operatorname{arsinh}(2) + 2\sqrt{5}\right).$$

(b) Betrachte die beiden Teilen der Viviani-Fläche F:
$F_+ = F \cap \{z \geq 0\}$, $F_- = F \cap \{z \leq 0\}$. Es gilt $A(F_+) = A(F_-)$
wir berechnen deshalb nur $A(F_+)$. Parametrisierung

$$\psi : B_{R/2}\left(\left(\tfrac{R}{2}, 0\right)\right) \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} & \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} & 1 + \frac{y^2}{R^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}, \quad \det(g_{ij}) = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

$$\rightsquigarrow A(F_+) = R \int_{B_{R/2}((\frac{R}{2},0))} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy \overset{x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi}{=}$$

$$= R \int_{P_2^{-1}(B_{R/2}((\frac{R}{2},0)))} \frac{r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}} = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{R\cos\varphi} \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\, r\, dr \right) d\varphi$$

$$= 2R \int_0^{\pi/2} (\ldots)\, d\varphi \underset{\substack{t = R^2 - r^2 \\ dt = -2r\,dr}}{=} -R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{R^2}^{R^2\sin^2\varphi} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) d\varphi = -2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\sin\varphi - R)\, d\varphi$$

$$= 2R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Übung Sei $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z,\ z\leq 1\}$
ν = nach Innen zeigende Einheitsnormalenfeld
$X:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $X(x,y,z)=(z,x,y)$. Berechne auf zwei Arten $\int_M \langle \operatorname{rot} X,\nu\rangle\, dA$

Lösung $\operatorname{rot} X=(1,1,1)$; Parametrisierung von M:
(als Graph): $\psi:\overline{B_1(0)}\to M$, $\psi(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$
Blatt 5, Aufgabe 1 (a) $\rightsquigarrow$ $\nu(x,y)=\dfrac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$,
$\sqrt{\det(g_{ij})}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$

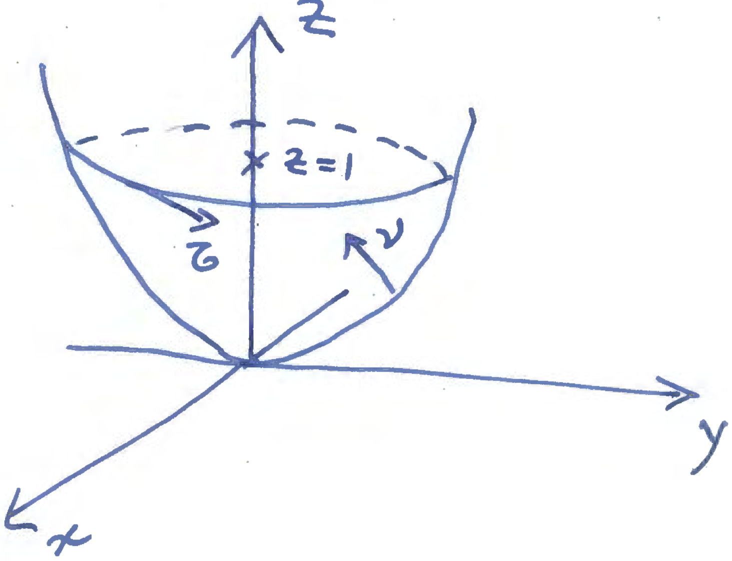
$$\rightsquigarrow \int_M \langle \operatorname{rot} X,\nu\rangle\, dA = \int_{\overline{B_1(0)}} (-2x-2y+1)\,dx\,dy = 0+0+\pi = \pi$$

Mit Stokes: $\int_M \langle \operatorname{rot} X,\nu\rangle\, dA = \int_{\partial M} \langle X, z\rangle\, ds$

wobei $z(x,y,1)=(-y,x,0)$

$$\rightsquigarrow \int_{\partial M} \langle X,z\rangle\, ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix}1\\ \cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi. \ \checkmark$$



Übung 7
Berechnen Sie jeweils $g^*(d\omega)$ und $d(g^*\omega)$ für

a) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) = g(s, t) = st, e^t), \quad \omega = xdy$ und

b) $g : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\} \to \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ gegeben durch

$$(x, y, z) = g(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$$
$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dy + zdz \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Lösung:
Zu a):

$$\begin{aligned} g^*(d\omega) &= g^*\left(d(xdy)\right) = g^*\left(dx \wedge dy\right) = d(st) \wedge d(e^t) = (tds + sdt) \wedge e^t dt \\ &= te^t ds \wedge dt + se^t \underbrace{dt \wedge dt}_{=0} = te^t ds \wedge dt \\ d\left(g^*\omega\right) &= d\left(stde^t\right) = d\left(ste^t dt\right) = te^t ds \wedge dt + s\left(e^t + te^t\right) \underbrace{dt \wedge dt}_{=0} = te^t ds \wedge dt \end{aligned}$$

Zu b): $g^*(d\omega) \equiv d\left(g^*\omega\right) \equiv= 0$, da beides 3-Formen auf 2 Mannigfaltigkeiten sind.

Übung 8
Sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge A von X wird *nirgends dicht* genannt, wenn der Abschluss keine nicht-leere offene Menge enthält. Eine Teilmenge von X heißt *mager*, wenn sie eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Teilmengen von X ist. Dann wird definiert

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ oder } X \backslash A \text{ ist mager }\} \qquad \text{und}$$
$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{A mager,} \\ 1, & X \backslash A \text{ mager.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra und μ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.
Hinweis: Die Begriffe nirgends dicht *und* mager *sind für die Klausur nicht relevant.*

Lösung:
$\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra:

i) Zu zeigen $X \in \mathcal{A}$: Da $\emptyset$ nirgends dicht und somit auch mager ist, gilt $X \backslash \emptyset$ mager und somit ist $X \in \mathcal{A}$.

ii) Zu zeigen $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{A}$: $A \in \mathcal{A}$ impliziert A mager oder $X \backslash A$ mager. A mager impliziert $X \backslash (X \backslash A) = A$ ist mager und $X \backslash A$ mager impliziert $X \backslash A$ ist selbst mager. Also ist $X \backslash A$ oder $X \backslash (X \backslash A)$ mager und somit $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

iii) Zu zeigen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$:

Fall 1: A_n mager $\forall n \in \mathbb{N}$, das heißt $A_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k^n$ mit B_k^n nirgends dicht. Dann folgt

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^n.$$

Diese geschachtelten abzählbaren Vereinigungen sind immer noch abzählbar (Argument wir bei der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$) und damit ist A mager und somit $A \in \mathcal{A}$.

Fall 2: $\exists n_0$ mit $X\backslash A_{n_0}$ mager, das heißt $X\backslash A_{n_0} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k$ mit B_k nirgends dicht für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} X\backslash A &= X\Big\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X\backslash A_n = \bigcap_{n\neq n_0} X\backslash A_n \cap X\backslash A_{n_0} \\ &= \underbrace{\bigcap_{n\neq n_0} X\backslash A_n}_{=:\tilde{A}} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{A} \cap B_k \end{aligned}$$

Mit B_k ist aber auch $\tilde{A} \cap B_k$ nirgends dicht, da $\tilde{A} \cap B_k \subset B_k$. Somit ist $X\backslash A$ mager und $A \in \mathcal{A}$.

μ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$:

i) Zu zeigen $\mu(\emptyset) = 0$: Klar, da die leere Menge nirgends dicht und somit mager ist.

ii) Zu zeigen $\mu \geq 0$: Klar, da μ nur die Werte 0 und 1 annimmt.

iii) Zu zeigen $\mu\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$:

Fall 1: A_n mager für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mager (wie oben) und es folgt:

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{=0}.$$

Fall 2: Es gibt ein $n_0 \in \mathcal{A}$ mit $X\backslash A_{n_0}$ mager. Da die Vereinigung der A_n disjunkt ist gilt $A_n \subset X\backslash A_{n_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{n_0\}$ und somit sind all diese A_n mager. Genauso wie oben folgt außerdem $X\backslash \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mager und

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \sum_{n\neq n_0} \underbrace{\mu(A_n)}_{=1} + \underbrace{\mu(A_{n_0})}_{=0}.$$