Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 13 – Besprechung in der Sonderübung

Übung 1

a) Zeigen Sie, dass das Katenoid $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to M$, $\psi(v, u) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Finde eine möglichst große offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, so dass $\psi|_U : U \to M$ eine Parametrisierung ist.

c) Zeigen Sie, das $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant \cosh^2(z)\}$ eine glatt berandete Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist, und lege auf $M = \partial D$ die Randorientierung fest. Zeigen Sie, dass ψ orientierungserhaltend ist.

d) Berechnen Sie die globale Darstellung der Volumenform ω_m des Katenoids und die lokale Darstellung bezüglich der Karte $\psi^{-1} : \psi(U) \to U$.

e) Berechnen Sie $\psi^*(f\omega_M)$, wobei $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

f) Berechnen Sie $\displaystyle\int_M \frac{1}{x^2 + y^2}\, \omega_M$.

Übung 2

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $V_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$V_\lambda(x, y, z) = \Big(\frac{\lambda xz}{1 + x^2} + y\,, x\,, \log(1 + x^2) - \lambda z\Big)\,.$$

a) Untersuchen Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die 1-Form $\omega^{V_\lambda} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ein Potential besitzt, und bestimmen Sie für diese λ ein Potential von ω^{V_λ}.

b) Berechnen Sie für die λ, für welche ω^{V_λ} ein Potential besitzt, das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega^{V_\lambda}$ entlang der Kurve $\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(8\pi t), (t - 1)^2 - t - 1, 5)$.

Übung 3

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \to \|x\|_2^{-\alpha}$ genau dann über die Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar ist, wenn $\alpha < n$. Berechnen Sie $\int_{B_R(0)} \|x\|_2^{-\alpha}\, d\lambda_n$.

b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $\mu : K \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte meßbare Funktion. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_K \frac{\mu(x)}{\|x - a\|_2^\alpha}\, d\lambda_n$$

für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ und jeden Exponenten $\alpha < n$ existiert.

Übung 4
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Wendelfläche

$$W = \{(r\cos v, r\sin v, v) : (v, r) \in [0, 4\pi] \times (0, 2)\},$$

und der Viviani-Fläche (Blatt 5).

Übung 5
Sei $M = \left\{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z,\ z \leqslant 1\right\}$ und sei ν das nach Innen (des Paraboloids) zeigende Einheitsnormalenfeld. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad X(x, y, z) = (z, x, y).$$

Berechnen Sie auf zwei Arten das Integral

$$\int_M \langle \operatorname{rot} X, \nu\rangle \, dA\,.$$

Übung 6
Wiederholen Sie zum Thema Lebesgue- und Riemann-Integrierbarkeit noch einmal Serie 10 Aufgabe 1,2, Serie 11 Aufgabe 1, 2 und Serie 12 Aufgabe 1, 2, 3.

Übung 7
Berechnen Sie jeweils $g^*(d\omega)$ und $d(g^*\omega)$ für

a) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) = g(s, t) = st, e^t), \quad \omega = xdy$ und

b) $g : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\} \to \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ gegeben durch

$$(x, y, z) = g(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$$

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dy + zdz \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Übung 8
Sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge A von X wird *nirgends dicht* genannt, wenn der Abschluss keine nicht-leere offene Menge enthält. Eine Teilmenge von X heißt *mager*, wenn sie eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Teilmengen von X ist. Dann wird definiert

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ oder } X\backslash A \text{ ist mager }\} \qquad \text{und}$$

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{A mager,} \\ 1, & X\backslash A \text{ mager.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra und μ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.
Hinweis: Die Begriffe nirgends dicht *und* mager *sind für die Klausur nicht relevant.*