

**Aufgabe 1**

**4 Punkte**

a) Sei  $r > 0$ . Zeigen Sie, dass

$$\psi : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni (\phi, \theta) \mapsto (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^3$$

eine Parametrisierung der 2-Sphäre

$$S_r^2 = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \right\}$$

vom Radius  $r$  in  $\mathbb{R}^3$  ist.

b) Zeigen Sie, dass der Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Geben Sie lokale Parametrisierungen an, die den Zylinder überdecken.

**Lösung:**

**Zu a):** Sei

$$P : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$$

die Kugelkoordinatenabbildung.  $P$  ist ein Diffeomorphismus. Identifiziere  $\{r\} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  zu  $(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  für ein festes  $r \in \mathbb{R}_+$ . Dann gilt:

$$\psi = P|_{\{r\} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}.$$

Daraus folgt:

- Im  $\psi = S^2 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$  ist offen in  $S^2$  bezüglich der Teilraumtopologie,
- $\psi$  ist bijektiv (als Einschränkung einer bijektiven Abbildung),
- $\psi^{-1} = (P|_{\{r\} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1} = P^{-1}|_{\text{Im } \psi}$  ist stetig,
- $\psi$  ist Immersion, da die zwei Spalten von  $J_\psi(\varphi, \vartheta)$  Spalten von  $J_P(r, \varphi, \vartheta) \in Gl(3)$  sind, also linear unabhängig.

**Zu b):** Der Zylinder  $Z$  ist Lösungsmenge einer unabhängigen Gleichung:  $Z = f^{-1}(0)$  wobei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ . Für den Gradienten von  $f$  gilt

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2x, 2y, 0)^T$$

Für jeden Punkt  $p \in Z$  ist  $\text{grad } F(p) \neq 0$  also  $p$  ist ein regulärer Punkt und 1 ein regulärer Wert. Folglich ist  $Z$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

Wir betrachten einen Punkt  $p = (x, y, z) \in Z$  und  $\varphi_0 \in [0; 2\pi)$  der Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und dem Strahl durch  $(0, 0)$  und  $(x, y)$  in der  $xy$ -Ebene, d.h.  $x = \cos \varphi_0$ ,  $y = \sin \varphi_0$ . Wir identifizieren  $(\cos \varphi, \sin \varphi) \cong e^{i\varphi}$ . Wir zeigen, dass die Abbildung

$$f : W = (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow Z \setminus L, \quad f(\varphi, z) = (e^{i\varphi}, z)$$

eine lokale Parametrisierung von  $Z$  um den Punkt  $p$  ist.  $L$  bezeichnet dabei die Gerade  $\{(e^{i(\varphi_0)}, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$ .  $f(W) = Z \cap (\mathbb{R}^3 \setminus L)$  ist offen in der auf  $Z$  induzierten Topologie.  $f$  ist bijektiv mit Inversem

$$f^{-1} : Z \setminus L \rightarrow (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi) \times \mathbb{R}, \quad f^{-1}(w, z) = (\arg(we^{-i(\varphi_0 - \pi)}) + \varphi_0 - \pi, z),$$

wobei  $w = x + iy$ . Da die  $\arg$ -Funktion stetig ist, ist  $f$  ein Homöomorphismus. Die beiden Spalten der Jacobi-Matrix von  $f$  sind gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, folglich hat  $df(\varphi, z)$  für alle Parameter in  $W$  maximalen Rang. Dies zeigt, dass  $f$  eine lokale Parametrisierung von  $Z$  um  $p$  ist.

## Aufgabe 2

4 Punkte

a) Zeigen Sie, dass der Kegel

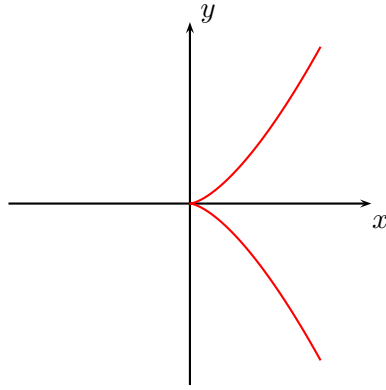
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist aber  $K \setminus \{0\}$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist.

b) Zeigen Sie, dass die Neilsche Parabel

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  ist.



**Lösung:**

Angenommen  $K$  sei eine Untermannigfaltigkeit, dann hätte diese die Dimension 2, da z.B.  $\{(x, y, z) \in K | z > 0\}$  als offene Teilmenge von  $K$  eine Untermannigfaltigkeit dieser Dimension ist (Betrachte die annihilierende Funktion  $F(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$  auf  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ ).

**Zu a) Topologisches Gegenargument:** Betrachte eine lokale Parametrisierung um  $0 = (0, 0, 0) \in K$ , d.h. einen Homöomorphismus

$$f : W \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow K \cap U^*, \quad U^* \subset \mathbb{R}^3 \text{ offene Umgebung der } 0.$$

Wir können  $W$  oBdA als offene Kreisscheibe wählen. Entfernt man aus der Kreisscheibe  $W$  den Punkt  $f^{-1}(0)$ , so bleibt  $W \setminus f^{-1}(0)$  zusammenhängend. Andererseits zerfällt  $(K \cap U^*) \setminus \{0\}$  aber in zwei disjunkte nicht-leere offene Teilmengen  $\{(x, y, z) \in K \cap U^* | z < 0\}$  und  $\{(x, y, z) \in K \cap U^* | z > 0\}$ , da  $\{(x, y, z) \in K \cap U^* | z = 0\} = \{0\}$ . Da  $f$  stetig ist, so ist auch  $f(W \setminus f^{-1}(0)) = (K \cap U^*) \setminus \{0\}$  zusammenhängend. Widerspruch. Also kann es keine lokale Parametrisierung des Kegels im Punkt 0 geben.

**Ein anderes Argument:** Wäre  $K$  eine Untermannigfaltigkeit, so hätte  $K$  die Dimension 2. Nach dem Satz 11.2.6 wäre dann  $K$  in der Nähe von 0 ein Graph über eine der  $xy$ - oder  $yz$ - oder  $zx$ -Ebenen. Man sieht aber leicht, dass dies nicht wahr ist. Widerspruch.

**Ein weiteres Argument:** Wäre  $K$  eine Untermannigfaltigkeit, so wäre  $K \cap U = F^{-1}(c)$ , wobei  $U$  eine Umgebung von 0 ist und  $c$  ein regulärer Wert von  $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$  ist. Dann gilt  $F(t, 0, t) = F(0, t, t) = F(t, t, \sqrt{2}t) = 0$  für  $t$  in einer Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}$ . Durch Ableiten nach  $t$  in  $t = 0$  erhält man ein System in den Unbekannten  $\frac{\partial F}{\partial x}(0)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(0)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}(0)$ , das die Einzige Lösung  $(0, 0, 0)$  hat. Folglich ist 0 ein kritischer Punkt von  $F$ . Widerspruch.

**Zu b):** Wäre  $P$  eine Untermannigfaltigkeit, so hätte  $P$  die Dimension 1. Nach dem Satz wäre  $P$  in der Nähe von 0 ein Graph über eine der  $x$ -Achse oder  $y$ -Achse. Man sieht leicht, dass  $P$  kein Graph über die  $x$ -Achse sein kann, z.B. weil

$$P \ni \left( \frac{1}{n}, \pm \frac{1}{n^{3/2}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Es bleibt nur die Möglichkeit, dass  $P$  ein Graph über die  $y$ -Achse ist, etwa  $P = \{(g(y), y) : y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$  mit  $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Daraus folgt aber  $g(y) = y^{2/3}$  und  $g$  ist in 0 nicht differenzierbar. Widerspruch.

### Aufgabe 3

4 Punkte

Seien  $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$  und  $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$  Untermannigfaltigkeiten von Dimension  $n_1$  bzw.  $n_2$ . Seien  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  und  $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$  Atlanten für  $M_1$  bzw.  $M_2$ . Zeigen Sie, dass

$$M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$$

eine  $(n_1 + n_2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$  ist und

$$\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j) : i \in I, j \in J\}$$

ein Atlas für  $M_1 \times M_2$  ist, wobei für  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  die Abbildung  $\varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  definiert ist durch  $(\varphi_i \times \psi_j)(x, y) = (\varphi_i(x), \psi_j(y))$ .

### Lösung:

Seien  $U, \varphi \in \mathcal{A}$ ,  $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ . Dann gilt:

- $U \times V$  offen in  $M_1 \times M_2$ ,  $\varphi(U) \times \psi(V)$  offen in  $\mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ,
- $\varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \varphi(U) \times \psi(V)$  ist bijektiv und stetig,
- $(\varphi \times \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \times \psi^{-1} : \varphi(U) \times \psi(V) \rightarrow U \times V$  ist stetig,
- $d(\varphi^{-1} \times \psi^{-1})(a, b) = d\varphi^{-1}(a) \times d\psi^{-1}(b)$  ist injektiv, da  $d\varphi^{-1}(a)$ ,  $d\psi^{-1}(b)$  injektiv sind.

Also ist  $(\varphi \times \psi)^{-1}$  eine Parametrisierung von  $U \times V$ . Außerdem gilt:

$$M_1 \times M_2 = \bigcup_{i \in I, j \in J} U_i \times V_j.$$

**Zusatzaufgabe****+4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die stereographische Projektionen einen Atlas auf  $S^n$  bilden und berechnen Sie die Kartenübergänge.

**Lösung:**

Um die Formel für  $p_N : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu finden, schreibt man die Gleichung der Geraden  $\overline{Nx}$ , mit  $x \in S^n \setminus \{N\}$ ; nämlich  $\overline{Nx} = \{x(t) = tN + (1-t)x : t \in \mathbb{R}\}$  und setzt  $x_{n+1}(t) = 0$ . Man löst diese Gleichung nach  $t$  und setzt dann  $t$  in  $x_1(t) \dots, x_n(t)$  ein. Es ergibt sich

$$p_N(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}.$$

Um die Formel für  $p_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$  zu finden, betrachtet man die Gerade  $\overline{N(y, 0)}$ , mit  $y \in \mathbb{R}^n$ , nämlich  $\overline{N(y, 0)} = \{x(t) = tN + (1-t)(y, 0) : t \in \mathbb{R}\}$  und setzt  $\|x(t)\| = 1$ . Man löst diese Gleichung nach  $t$  und dann setzt  $t$  in  $x(t)$  ein. Es ergibt sich

$$p_N^{-1}(y) = \frac{(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1)}{1 + \|y\|^2}.$$

Nun ist  $S^n \setminus \{N\}$  offen in  $S^n$ ,  $p_N, p_N^{-1}$  stetig als rationale Funktionen ohne Polstellen auf ihren Definitionsbereich.

**Es bleibt zu zeigen, dass  $p_N^{-1}$  eine Immersion ist.** Sei

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x : x_{n+1} = 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}.$$

Dann gilt  $\Phi|_{S^n \setminus \{N\}} = p_N$ ,  $\Phi$  ist glatt und  $\Phi \circ p_N^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ . Nach der Kettenregel  $d\Phi(p_N^{-1}(y)) \circ d(p_N^{-1})(y) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  also  $d(p_N^{-1})(y)$  ist injektiv für alle  $y \in \mathbb{R}^n$ . Es folgt, dass  $(S^n \setminus \{N\}, p_N)$  eine Karte auf  $S^n$  ist. Für  $p_S : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zeigt man ähnlich,

$$p_S(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_{n+1}}, \quad x \in S^n \setminus \{S\}$$

$$p_S^{-1}(y) = \frac{(2y_1, \dots, 2y_n, 1 - \|y\|^2)}{1 + \|y\|^2}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Und  $(S^n \setminus \{S\}, p_S)$  ist eine Karte auf  $S^n$ . Da  $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$ , bilden die stereographischen Projektionen einen Atlas auf  $S^n$ .

Man rechnet nach, dass  $p_N \circ p_S^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $p_N \circ p_S^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}$ .