Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 2 – Abgabe: 7. - 10. 11. 2016 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei $r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\psi : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni (\phi, \theta) \mapsto (r\cos\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\theta) \in \mathbb{R}^3$$

eine Parametrisierung der 2-Sphäre

$$S_r^2 = \left\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r\right\}$$

vom Radius r in $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie lokale Parametrisierungen an, die den Zylinder überdecken.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass der Kegel

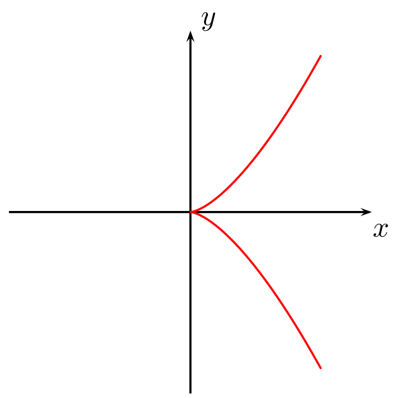
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist aber $K \setminus \{0\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Neilsche Parabel

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.



Bitte wenden!

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Seien $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ und $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ Untermannigfaltigkeiten von Dimension n_1 bzw. n_2. Seien $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ und $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ Atlanten für M_1 bzw. M_2. Zeigen Sie, dass

$$M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$$

eine $(n_1 + n_2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ ist und

$$\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j) : i \in I\,, j \in J\}$$

ein Atlas für $M_1 \times M_2$ ist, wobei für $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\psi_i : V_j \to \mathbb{R}^{n_2}$ die Abbildung $\varphi_j \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ definiert ist durch $(\varphi_i \times \psi_j)(x, y) = (\varphi_i(x), \psi_j(y))$.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die stereographische Projektionen einen Atlas auf S^n bilden und berechnen Sie die Kartenübergänge.