Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 3 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Bestimmen Sie den Tangentialraum und den Normalenraum an einen beliebigen Punkt

a) des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ und

b) des Katenoids $M = \{(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Lösung:

Zu a): Der Zylinder Z ist gegeben durch die Gleichung $F(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Dann lassen sich Tangential- und Normalraum einfach berechnen:
Für den Tangentialraum an Z in $p = (x, y, z) \in Z$ gilt

$$\begin{aligned} T_pZ &= \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \operatorname{grad} F(p), v\rangle = 0\} \\ &= \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\ &= \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid xv_1 + yv_2 = 0\} \end{aligned}$$

Für den Normalenraum gilt $N_pZ = \langle \operatorname{grad} F(p)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle (x, y, 0)\rangle_{\mathbb{R}}$:

Zu b): Auch das Katenoid ist die Nullstellenmenge der Funktion $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \cosh^2 z$. Sei $p = (x, y, z) \in M$. Dann gilt

$$N_pM = \langle \operatorname{grad} F(p)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle (x, y, -\cosh z \sinh z)\rangle_{\mathbb{R}}$$

und

$$\begin{aligned} T_pM &= \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 | \langle \operatorname{grad} F(p), v\rangle = 0\} \\ &= \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -\cosh z \sinh z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 | xv_1 + yv_2 - v_3 \cosh z \sinh z = 0\} \end{aligned}$$

Eine andere Möglichkeit den Tangentialraum zu berechnen, besteht durch die lokalen Parametrisierungen.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine glatte positive Funktion,

$$M_f := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = f(z)^2 \right\}$$

eine durch f definierte Rotationsfläche und $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ ein Zylinder. Sei $F : M_f \to Z$ die Abbildung

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{1}{f(z)}\, y \, , \ \frac{1}{f(z)}\, x \, , \ z + 1 \right) \ .$$

a) Was bedeutet diese Abbildung geometrisch?

b) Zeigen Sie, daß F ein Diffeomorphismus zwischen den Flächen M_f und Z ist, d.h. $F : M_f \to Z$ ist bijektiv, F und F^{-1} sind glatt.

c) Sei $p = (x, y, z) \in M_f$. Zeigen Sie, daß $v = (-y, x, 0) \in \mathbb{R}^3$ ein Tangentialvektor an M_f im Punkt p ist, und bestimmen Sie den Bildvektor $dF(p) \cdot v \in T_{F(p)}Z$.

d) Veranschaulichen Sie v und $dF(p) \cdot v$ in einer Skizze.

Lösung:

Zu a): Die Abbildung F ordnet dem Punkt $p = (x, y, z) \in M_f$ folgenden Punkt $F(p)$ auf dem Zylinder Z zu. Zuerst betrachtet man den eindeutigen Punkt auf dem Zylinder, der auf dem Strahl liegt, der von $(0, 0, z)$ aus durch p geht. Danach dreht man diesen Punkt auf dem Zylinder in der Ebene mit konstanter z-Koordinate um $\frac{\pi}{2}$ nach links um die z-Achse. Anschliessend schieben wir diesen Punkt um 1 in die Höhe.

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{f(z)}, \frac{y}{f(z)}, z \right) \mapsto \left(-\frac{y}{f(z)}, \frac{x}{f(z)}, z + 1 \right)$$

Zu b): F ist bijektiv. Um das einzusehen, geben wir eine Umkehrabbildung $G : Z \longrightarrow M_f$ zu F an:

$$G(x, y, z) := (f(z-1)y, -f(z-1)x, z-1) \ .$$

Für $(x, y, z) in Z$ folgt

$$\begin{aligned} G_1(x, y, z)^2 + G_2(x, y, z)^2 &= (f(z-1)y)^2 + (-f(z-1)x)^2 \\ &= (f(z-1))^2 \underbrace{(y^2 + x^2)}_{=1, \text{ da } (x,y,z) \in Z} = (f(z-1))^2 = (G_3(x, y, z))^2 \end{aligned}$$

und somit dass $G(Z) \subset M_f$. Es ist leicht nachzurechnen, dass:

$$F \circ G = \mathrm{Id}_Z \quad \text{und} \quad G \circ F = \mathrm{Id}_{M_f} \ .$$

Folglich ist G die inverse Abbildung zu F, d.h. F bijektiv. Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von F und G benutzen wir folgendes Kriterium: Ist $\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte Abbildung der rellen Räume und sind $M \subset \mathbb{R}^3$ und $M' \subset \mathbb{R}^3$ Untermannigfaltigkeiten mit $\widetilde{F}(M) \subset M'$, so ist $F := \widetilde{F}|_M : M \longrightarrow M'$ eine glatte Abbildung der Untermanigfaltigkeiten. Ausserdem gilt für das Diferential von F

$$dF_p(v) = d\widetilde{F}(p)(v) \quad \text{für alle } v \in T_pM\,.$$

Die Abbildungen F und G sind offensichtlich die Einschränkungen der auf gleiche Weise definierten Abbildungen im $\mathbb{R}^3$. Somit ist F und G glatt, also F ein C^∞-Diffeomorphismus zwischen M_f und Z.

Zu c): Wir zeigen zunächst, dass $v \in T_pM_f$. M_f ist eine gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeit. Die definierende Gleichung ist $\varphi(x,y,z) = x_2 + y_2 - f(z)^2 = 0$. Für den Gradienten von φ gilt $\operatorname{grad}\varphi(x,y,z) = (2x, 2y, 2f(z)f'(z))$: Dieser Vektor ist für alle Punkte von M_f von Null verschieden. Folglich gilt

$$T_{(x,y,z)}M_f = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, xv_1 + yv_2 + f(z)f'(z)v_3 = 0 \right\}$$

Somit ist $(-y, x, 0) \in T_{(x,y,z)}M_f$.
Wir berechnen nun das Differential:
Nach Definition gilt für das Differential: Sei $\gamma : I \longrightarrow M_f$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p = (x,y,z)$ und $\gamma'(0) = v = (-y, x, 0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
dF(p)\cdot v =& \frac{d}{dt}\,(F(\gamma(t)))|_{t=0} \\
=& \frac{d}{dt}\left(-\frac{\gamma_2(t)}{f(\gamma_3(t))}, \frac{\gamma_1(t)}{f(\gamma_3(t))}, \gamma_3(t)+1\right)\Bigg|_{t=0} \\
=& \left(-\frac{\gamma_2'(t)f(\gamma_3(t)) - \gamma_2(t)f'(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)}{f(\gamma_3(t))^2}, \frac{\gamma_1'(t)f(\gamma_3(t)) - \gamma_1(t)f'(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)}{f(\gamma_3(t))^2}, \gamma_3'(t)\right)\Bigg|_{t=0} \\
=& \left(-\frac{v_2f(z) - yf'(z)v_3}{f(z)^2}, \frac{v_1f(z) - xf'(z)v_3}{f(z)^2}, v_3\right) \\
=& \left(-\frac{xf(z) - yf'(z)v\cdot 0}{f(z)^2}, \frac{-yf(z) - xf'(z)\cdot 0}{f(z)^2}, 0\right) = \left(-\frac{x}{f(z)}, -\frac{y}{f(z)}, 0\right)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Es sei S^2 die 2–dimensionale Sphäre vom Radius 1 im $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Abbildungen $X, Y : S^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$X(x,y,z) = (-y, x, 0) \quad , \qquad Y(x,y,z) = (-z, 0, x)\,.$$

a) Zeigen Sie, daß X und Y glatte Vektorfelder auf S^2 sind. Skizziere diese Vektorfelder.

b) Geben Sie die Komponenten von X und Y bzgl. der durch die sphärischen Koordinaten (Serie 2, Aufgabe 1a)) gegebenen kanonischen Basis an.

Lösung:
Zu a): Offenbar lassen sich X, Y auf ganz $\mathbb{R}^3$ zu glatten Abbildungen

$$\widetilde{X}(x,y,z) = (-y,x,0) \quad \text{und} \quad \widetilde{Y}(x,y,z) = (-z,0,x)$$

fortsetztzen. Somit sind auch die Einschränkungen $X = \widetilde{X}|_{S^2}$ und $Y = \widetilde{Y}|_{S^2}$ glatte Abbildungen von S^2 nach $\mathbb{R}^3$. Ferner ist

$$\langle (x,y,z), X(x,y,z)\rangle = \langle (x,y,z), Y(x,y,z)\rangle = 0$$

d.h. es gilt $X(x,y,z), Y(x,y,z) \in T_{(x,y,z)}S^2$. Also sind X und Y glatte Vektorfelder auf S^2.

Zu b): Wir betrachten die lokale Parametrisierung der Sphäre S^2 durch die sphärischen Koordinaten

$$\psi : (0,2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni (\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos\varphi\cos\vartheta,\, \sin\varphi\cos\vartheta,\, \sin\vartheta).$$

Die kanonischen Basisfelder der zu dieser Parametrisierung gehörenden Karte (U, ψ^{-1}) sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi}(x) &= \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(\varphi,\vartheta) = (-\sin\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\cos\vartheta, 0)\,,\\ \frac{\partial}{\partial\vartheta}(x) &= \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}(\varphi,\vartheta) = (-\cos\varphi\sin\vartheta, -\sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)\,.\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$X(\cos\varphi\cos\vartheta,\, \sin\varphi\cos\vartheta,\, \sin\vartheta) = (-\sin\varphi\cos\vartheta,\, \cos\varphi\cos\vartheta,\, 0) = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

und

$$Y(\cos\varphi\cos\vartheta,\, \sin\varphi\cos\vartheta,\, \sin\vartheta) = (-\sin\vartheta,\, 0,\, \cos\varphi\cos\vartheta) = \alpha\frac{\partial}{\partial\varphi} + \beta\frac{\partial}{\partial\vartheta}.$$

Die z-Komponente impliziert $\beta = \cos\varphi$. Einsetzen in die x-Komponente ergibt

$$\begin{aligned} &-\alpha\sin\varphi\cos\vartheta - \cos^2\varphi\sin\vartheta = -\sin\vartheta\\ \Rightarrow\quad &\alpha = \frac{\sin\vartheta - \cos^2\varphi\sin\vartheta}{\sin\varphi\cos\vartheta} = \frac{\sin^2\varphi\sin\vartheta}{\sin\varphi\cos\vartheta} = \sin\varphi\tan\vartheta\end{aligned}$$

Einsetzen in die y-Komponente bestätigt das Ergebnis

$$\begin{aligned}\alpha\cos\varphi\cos\vartheta - \beta\sin\varphi\sin\vartheta &= \sin\varphi\tan\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta\\ &= \sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta - \cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta = 0.\end{aligned}$$

Somit ist

$$Y = \alpha\frac{\partial}{\partial\varphi} + \beta\frac{\partial}{\partial\vartheta} = \sin\varphi\tan\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ .$$

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Identifizieren Sie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und betrachten Sie die stereographische Projektion $p_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}\,.$
Sei

$$f : S^2 \to S^2 \quad , \qquad f(x) = \begin{cases} p_N^{-1} \circ P \circ p_N(x) & , \quad x \neq N \\ N & , \quad x = N \end{cases} .$$

Zeigen Sie, daß $f \in C^\infty(S^2, S^2)$.

Lösung:

Man muss zeigen, dass die Kartendarstellungen von $\widetilde{P}$ bezüglich die Karten eines Atlanten auf S^2 glatt sind. Wir betrachten den Atlas $(S^2 \setminus \{N\}, p_N)$, $(S^2 \setminus \{S\}, p_S)$.
Die Kartendarstellung $p_N \circ \widetilde{P} \circ p_N^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist glatt, weil $p_N \circ \widetilde{P} \circ p_N^{-1} = p_N \circ p_N^{-1} \circ P \circ p_N \circ p_N^{-1} = P$.
Da $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$, gilt $\lim_{x\to N} \widetilde{P}(x) = N$ und $\widetilde{P}$ ist stetig. Deswegen gibt es eine Umgebung $W \subset S^2$ von N, so dass $\widetilde{P}(W) \subset S^n \setminus \{S\}$. Für die Kartendarstellung $p_S \circ \widetilde{P} \circ p_S^{-1} : p_S(W) \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\left(p_S \circ \widetilde{P} \circ p_S^{-1}\right)(z) = \begin{cases} \left(p_S \circ p_N^{-1} \circ P \circ p_N \circ p_S^{-1}\right)(z)\,, & z \neq 0 \\ 0\,, & z = 0 \end{cases}$$

Aber

$$(p_S \circ p_N^{-1})(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\overline{z}}\,, \text{für } z \neq 0\,.$$

Also für $z \neq 0$

$$\left(p_S \circ \widetilde{P} \circ p_S^{-1}\right)(z) = \frac{1}{\overline{P(\frac{1}{\overline{z}})}} = \frac{z^n}{\overline{a}_n + \overline{a}_{n-1} z + \ldots + \overline{a}_0 z^n}.$$

Weil $a_n \neq 0$ und $n \geqslant 1$ ist die Fortsetzung dieser Abbildung mit 0 in 0 glatt (rationale Abbildung ohne Polstellen auf dem Definitionsbereich).