Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 3 – Abgabe: 14. - 17. 11. 2016 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Bestimmen Sie den Tangentialraum und den Normalenraum an einen beliebigen Punkt

a) des Zylinders $Z = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\big\}$ und

b) des Katenoids $M = \{(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine glatte positive Funktion,

$$M_f := \big\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 = f(z)^2 \,\big\}$$

eine durch f definierte Rotationsfläche und $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 = 1\}$ ein Zylinder. Sei $F : M_f \to Z$ die Abbildung

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{1}{f(z)}\, y \,,\ \frac{1}{f(z)}\, x \,,\ z + 1 \right) \ .$$

a) Was bedeutet diese Abbildung geometrisch?

b) Zeigen Sie, daß F ein Diffeomorphismus zwischen den Flächen M_f und Z ist, d.h. $F : M_f \to Z$ ist bijektiv, F und F^{-1} sind glatt.

c) Sei $p = (x, y, z) \in M_f$. Zeigen Sie, daß $v = (-y, x, 0) \in \mathbb{R}^3$ ein Tangentialvektor an M_f im Punkt p ist, und bestimmen Sie den Bildvektor $dF(p) \cdot v \in T_{F(p)}Z$.

d) Veranschaulichen Sie v und $dF(p) \cdot v$ in einer Skizze.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Es sei S^2 die 2–dimensionale Sphäre vom Radius 1 im $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Abbildungen $X, Y : S^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0) \quad , \qquad Y(x, y, z) = (-z, 0, x) \ .$$

a) Zeigen Sie, daß X und Y glatte Vektorfelder auf S^2 sind. Skizziere diese Vektorfelder.

b) Geben Sie die Komponenten von X und Y bzgl. der durch die sphärischen Koordinaten (Serie 2, Aufgabe 1a)) gegebenen kanonischen Basis an.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Identifizieren Sie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und betrachten Sie die stereographische Projektion $p_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$.
Sei

$$f : S^2 \to S^2 \quad , \qquad f(x) = \begin{cases} p_N^{-1} \circ P \circ p_N(x) & , \quad x \neq N \\ N & , \quad x = N \end{cases} \ .$$

Zeigen Sie, daß $f \in C^\infty(S^2, S^2)$.