Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 4 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Seien M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ glatt. Sei $f = F|_M : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{grad} f(x)$ die orthogonale Projektion von $\operatorname{grad} F(x)$ auf T_xM ist.

b) Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_3$, die Höhenfunktion auf der Sphäre S^2. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ (z.B. mit Hilfe von a)).

Lösung:
Zu a): Es gilt $df(x) = dF(x)|_{T_xM}$. Sei $P : \mathbb{R}^3 \to T_xM$ die orthogonale Projektion. Für alle $v \in T_xM$ gilt

$$\begin{aligned}\langle P(\operatorname{grad} F(x)),\, v\rangle &= \langle \operatorname{grad} F(x),\, P(v)\rangle \overset{v\in T_xM}{=} \langle \operatorname{grad} F(x),\, v\rangle \\ &= dF(x)\cdot v = df(x)\cdot v = \langle \operatorname{grad} f(x),\, v\rangle.\end{aligned}$$

also $P(\operatorname{grad} F(x)) = \operatorname{grad} f(x)$.

Zu b): Für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x) = x_3$ gilt $\operatorname{grad} F(x) = e_3$. Für $f = F|_{S^2}$, $x \in S^2$ bestimmt man $\operatorname{grad} f(x)$ als die Projektion von e_3 auf $T_xM = (R\cdot x)^\perp$. Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2$, $\psi(\phi, \theta) = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$. Wähle ϕ, θ mit $x = \psi(\phi, \theta)$. Eine ONB in T_xM ist dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\phi}(x) &= \frac{\partial\psi}{\partial\phi}(\phi,\theta) = (-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0)\\ \frac{\partial}{\partial\theta}(x) &= \frac{\partial\theta}{\partial\phi}(\phi,\theta) = (-\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi\cos\theta, \cos\theta)\end{aligned}$$

Folglich

$$\operatorname{grad} f(x) = \left\langle e_3, \frac{\partial}{\partial\phi}\right\rangle \frac{\partial}{\partial\phi} + \left\langle e_3, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle \frac{\partial}{\partial\theta} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\,,$$

da $\left\langle e_3, \frac{\partial}{\partial\phi}\right\rangle = 0$ und $\left\langle e_3, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle = \cos\theta$. Alternativ benutzt man die Formel aus der Vorlesung:

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}(\phi,\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}(x) + \frac{\partial f}{\partial\theta}(\phi,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}(x)$$

wobei $f(\phi, \theta) = (f\circ\psi)(\phi, \theta) = \sin\theta$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Es bezeichne $p_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion vom Südpol aus.

a) Sei $v \in T_xS^n$, wobei $x \neq S$. Vergleichen Sie die Länge des Vektors v im Euklidischen Vektorraum (T_xS^n, g_x) mit der Länge des Bildvektors $dp_S(x) \cdot v$ im Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

b) Seien $v, w \in T_xS^n$, wobei $x \neq S$. Vergleichen Sie den Winkel zwischen v, w in (T_xS^n, g_x) mit dem Winkel zwischen den Bildvektoren $dp_S(x) \cdot v$, $dp_S(x) \cdot w$ in $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Lösung:

Zu a): Sei $v \in T_xS^n$ und $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S^n$ eine glatte Kurve mit $x = \gamma(0)$, $v = \gamma'(0)$.

$$\begin{aligned} dp_S(x) \cdot v &= \frac{d}{dt}(p_S \circ \gamma)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))}{1 + \gamma_{n+1}(t)}|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\gamma_i'(0)(1 + \gamma_{n+1}(0)) - \gamma_i(0)\gamma_{n+1}'(0)}{(1 + \gamma_{n+1}(0))^2} \right)_{1 \leq i \leq n} \\ &= \frac{(v_1, \ldots, v_n)}{1 + x_{n+1}} - \frac{v_{n+1}}{(1 + x_{n+1})^2}(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

Wir benutzen $\langle v, x \rangle = 0$, $\langle x, x \rangle = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \langle dp_S(x) \cdot v, dp_S(x) \cdot v \rangle &= \frac{\langle (v_1, \ldots, v_n), (v_1, \ldots, v_n) \rangle}{(1 + x_{n+1})^2} - 2\frac{\langle (v_1, \ldots, v_n), (x_1, \ldots, x_n) \rangle \, v_{n+1}}{(1 + x_{n+1})^3} \\ &\quad + \frac{\langle (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \rangle \, v_{n+1}^2}{(1 + x_{n+1})^4} \\ &= \frac{\langle v, v \rangle - v_{n+1}^2}{(1 + x_{n+1})^2} - 2\frac{(\langle v, x \rangle - v_{n+1}x_{n+1}) \, v_{n+1}}{(1 + x_{n+1})^3} + \frac{\left(\langle x, x \rangle - x_{n+1}^2\right) v_{n+1}^2}{(1 + x_{n+1})^4} \\ &= \frac{\langle v, v \rangle}{(1 + x_{n+1})^2} + \frac{(-1 - x_{n+1} + 2x_{n+1} + 1 - x_{n+1}) \, v_{n+1}^2}{(1 + x_{n+1})^3} = \frac{\langle v, v \rangle}{(1 + x_{n+1})^2} \end{aligned}$$

d. h.

$$\|dp_S(x) \cdot v\| = \frac{1}{1 + x_{n+1}} \|v\| \tag{2}$$

Die Länge des Bildvektors von v ist also ein Vielfaches der Länge von v, wobei der Proportionalitätsfaktor gegen Unendlich geht, wenn x gegen den Südpol strebt.

Zu b): Analog zu (1) folgt

$$\langle dp_S(x)\cdot v, dp_S(x)\cdot w\rangle = \frac{1}{(1+x_{n+1})^2}\langle v,w\rangle \tag{3}$$

Der Winkel $\angle(v,w)$ ist gegeben durch $\cos\angle(v,w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$ Aus (2), (3) folgt

$$\cos\angle(dp_S(x)\cdot v, dS_N(x)\cdot w) = \frac{\frac{1}{(1+x_{n+1})^2}\langle v,w\rangle}{\frac{\|v\|}{1+x_{n+1}}\frac{\|w\|}{1+x_{n+1}}} = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} = \cos\angle(v,w).$$

Die stereographische Projektion ist also winkelerhaltend.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Es sei $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $X(x,y,z) = (-y,x,0)$. Zeigen Sie, daß es keine glatte Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $X = \operatorname{grad} f$.

b) Geben Sie den Gradienten einer Funktion $f \in C^\infty(S^n)$ in der durch die stereographische Projektion gegebenen Karte $(S^n \setminus \{S\}, p_S)$ an.

Lösung:
Zu a): Angenommen, es existiert $f \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ mit $\operatorname{grad} f = X$. Wir stellen $\operatorname{grad} f$ und X in sphärischen Koordinaten dar:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}(x,y,z) + \frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(x,y,z)$$

wobei $(x,y,z) = \psi(\phi,\theta)$ und $X = \frac{\partial}{\partial\phi}(x,y,z)$. Durch Vergleich der Koeffizienten erhält man

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial\phi}(\phi,\theta) = 1, \qquad \frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial\theta} = 0$$

Aus der 2. Identität folgt durch partielles Differenzieren:

$$\frac{\partial^2(f\circ\psi)}{\partial\phi\partial\theta} = 0$$

Dann ergibt die 1. Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2(f\circ\psi)}{\partial\phi\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos^2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$$

Zu b): Die Spalten der Jacobi-Matrix

$$J_{p_S^{-1}}(y) = \begin{pmatrix} \left(\frac{-4y_iy_j}{(1+\|y\|^2)^2} + \delta_{ij}\frac{2}{1+\|y\|^2}\right)_{1\leq i,j\leq n} \\ \frac{4y_1}{(1+\|y\|^2)^2}, \ldots, \frac{4y_n}{(1+\|y\|^2)^2} \end{pmatrix}$$

entsprechen die kanonischen Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial y_i}$. Die Koeffizienten der induzierten Metrik in dieser Karte:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle = 0, \quad i \neq j \quad \text{und} \quad g_{ij} = \frac{4}{(1+\|y\|^2)^2}$$

$$\text{d.h.} \quad (g_{ij}) = \left(\frac{2}{1+\|y\|^2}\right)^2 E_n, \quad (g^{ij}) = \left(\frac{1+\|y\|^2}{2}\right)^2 E_n$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{1+\|y\|^2}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ P_S^{-1})}{\partial y}(y)\frac{\partial}{\partial_i}(x)$$

wobei $x = p_S^{-1}(y)$.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Geben Sie die Koeffizienten der induzierten Riemannschen Metrik für die Wendelfläche M_1 und das Katenoid M_2 in der durch die jeweilige Parametrisierung ψ gegebenen Karte an:

a) Wendelfläche $M_1 := \{\psi(u,v) := (u\cos v, u\sin v, v) : u, v \in \mathbb{R}, u > 0\}$

b) Katenoid $M_2 = \{\psi(u,v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) : (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Lösung:
Zu a):

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (g_{i,j}(u,v))_{i\leq i,j\leq 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

Zu b):

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh(u)\cos v \\ \sinh(u)\sin v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -\cosh(u)\sin v \\ \cosh(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (g_{i,j}(u,v)) = \begin{pmatrix} \cosh^2(u) & 0 \\ 0 & \cosh^2(u) \end{pmatrix}$$