Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 4 – Abgabe: 21. - 24. 11. 2016 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Seien M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ glatt. Sei $f = F|_M : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{grad} f(x)$ die orthogonale Projektion von $\operatorname{grad} F(x)$ auf T_xM ist.

b) Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_3$, die Höhenfunktion auf der Sphäre S^2. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ (z.B. mit Hilfe von a)).

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Es bezeichne $p_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion vom Südpol aus.

a) Sei $v \in T_xS^n$, wobei $x \neq S$. Vergleichen Sie die Länge des Vektors v im Euklidischen Vektorraum (T_xS^n, g_x) mit der Länge des Bildvektors $dp_S(x) \cdot v$ im Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

b) Seien $v, w \in T_xS^n$, wobei $x \neq S$. Vergleichen Sie den Winkel zwischen v, w in (T_xS^n, g_x) mit dem Winkel zwischen den Bildvektoren $dp_S(x) \cdot v$, $dp_S(x) \cdot w$ in $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Es sei $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Zeigen Sie, daß es keine glatte Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $X = \operatorname{grad} f$.

b) Geben Sie den Gradienten einer Funktion $f \in C^\infty(S^n)$ in der durch die stereographische Projektion gegebenen Karte $(S^n \setminus \{S\}, p_S)$ an.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Geben Sie die Koeffizienten der induzierten Riemannschen Metrik für die Wendelfläche M_1 und das Katenoid M_2 in der durch die jeweilige Parametrisierung ψ gegebenen Karte an:

a) Wendelfläche $M_1 := \big\{\psi(u, v) := (u\cos v, u\sin v, v) : u, v \in \mathbb{R}, u > 0\big\}$

b) Katenoid $M_2 = \big\{\psi(u, v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\big\}$.