Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 5 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Zeigen Sie, dass

$$D = \{\, (x, x_{n+1}) \in U \times \mathbb{R} \,|\, x_{n+1} - f(x) \leq 0 \,\}$$

eine glatt berandete Teilmenge von $M = U \times \mathbb{R}$ ist, und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld.

b) Sei

$$M = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = 2 \,\} \quad \text{und } D = \{\, (x, y, z) \in M \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \,\}.$$

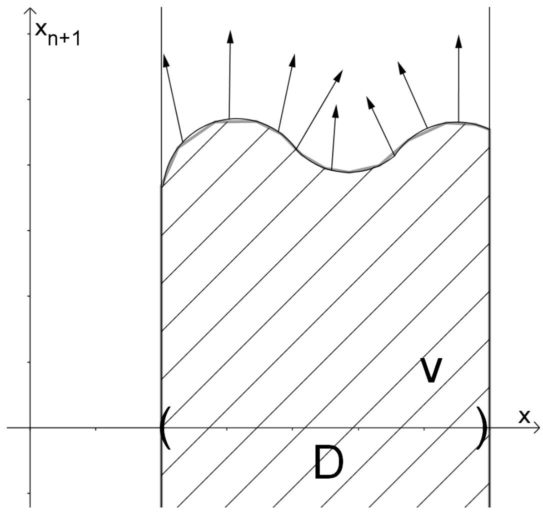
Zeigen Sie, dass D eine glatt berandete Teilmenge von M ist, und berechne das äußere Einheitsnormalenfeld ν. Berechne $T_{(x,y,z)}\partial D$ mit Hilfe einer Parametrisierung von ∂D und überprüfen Sie, ob $\nu(x, y, z) \perp T_{(x,y,z)}\partial D$.

Lösung:
Zu a) Der Rand von D in $U \times \mathbb{R}$ ist

$$\partial D = \{(x, x_{n+1}) : x_{n+1} = f(x)\}.$$

Die definierende Funktion ist $\varrho : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varrho(x, x_{x+1}) = x_{n+1} - f(x)$ mit $J_\varrho(x) = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1)$ von Rang 1 für alle x. D ist also glatt berandet und für $(x, x_{n+1}) \in \partial D$

$$\nu(x, x_{n+1}) = \frac{\operatorname{grad} \varrho(x, x_{n+1})}{\| \operatorname{grad} \varrho(x, x_{n+1})\|} = \frac{(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1)}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 + \dots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2}}.$$



Zu b) Die definierende Funktion ist $\varrho : M \to \mathbb{R}$, $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, wobei $d\varrho(x, y, z) : T_{(x,y,z)}\ M \to \mathbb{R}$ ist durch $v \mapsto \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \cdot v$ gegeben. Außerdem gilt $T_{(x,y,z)}M = \mathbb{R}(0, 2y, 2z)$ weil M ist Lösungsmenge von $y^2 + z^2 - 2 = 0$. Sei $(x, y, z) \in \partial D$. Dann gilt $d\varrho(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (2x, 2y, 0) = \lambda(0, 2y, 2z) \Rightarrow x = z = 0$ und $1 = y^2 = 2$ `. Es gilt also $d\varrho(x, y, z) \neq 0$ für alle $(x, y, z) \in \partial D$ und daher für alle (x, y, z) in einer Umgebung von ∂D (Stetigkeit von $d\varrho$). Also ist D glatt berandet. Sei $\Psi : \mathbb{R}_+ \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) \to M$, $\Psi(t, \theta) = (t, \sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$ eine Parametrisierung von M, $(x, y, z) = \Psi(t, \theta)$. Dann ist

$T_{(x,y,z)}M$ erzeugt von

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von ϱ ist nun die Projektion des Gradienten von $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2$ auf $T_{(x,y,z)}M$ (dabei brauchen wir eine Orthonormalbasis von $T_{(x,y,z)}M$):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varrho(x,y,z) &= \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-yz) \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ yz^2 \\ -y^2 z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $\nu(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 2y^2z^2}} \operatorname{grad} \varrho(x,y,z)$ für $(x,y,z) \in \partial D$.
Alternativ, $g_{11} = 1$, $g_{22} = 2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $(\varrho \circ \Psi)(t,\theta) = t^2 + \cos^2\theta$,

$$\operatorname{grad} \varrho(x,y,z) = 2t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot 4\cos\theta(-\sin\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} = 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-yz) \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ yz^2 \\ -y^2 z \end{pmatrix}.$$

Eine Parametrisierung der Kurve ∂D erhalten wir durch $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ und Einsetzen in $y^2 + z^2 = 2$. Es gibt zwei Lösungen $z = \pm\sqrt{2 - \sin^2\theta}$. Die Kurve ∂D hat in der Tat zwei Komponenten (je nachdem $z > 0$ oder $z < 0$) mit Parametriesierungen $\psi : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, \pm\sqrt{2 - \sin^2\theta}) = (x,y,z)$. Die Tangentialvektoren sind $\psi'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, \mp 2\sin\theta\cos\theta(2 - \sin^2\theta)^{-1/2}) = (-y, x, -\frac{2xy}{z})$ und

$$\langle \operatorname{grad} \varrho, \psi'(\theta) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ yz^2 \\ -y^2 z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -\frac{2xy}{z} \end{pmatrix} \right\rangle = xy(-2 + z^2 + y^2) = 0.$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Die Viviani–Fläche D ist der Durchschnitt des Vollzylinders

$$Z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$

mit der Sphäre $S_R^2 = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = R^2 \,\}$. Finden Sie die regulären und singulären Punkte von ∂D und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld.

Lösung:

Der Rand ∂D ist die Vivianische Kurve, gegeben als Lösungsmenge von:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0 \\ \varrho(x,y,z) = \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{R^2}{4} = x^2 - Rx + y^2 = 0 \end{cases}$$

Die Jacobi-Matrix der Abbildung $(x,y,z) \overset{F}{\longmapsto} (f(x,y,z), \varrho(x,y,z))$:

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho}{\partial x} & \frac{\partial \varrho}{\partial y} & \frac{\partial \varrho}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-R & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Für $y \neq 0$ gilt $\det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x-R & 2y \end{pmatrix} = -2Ry \neq 0$, also Rang $J_F = 2$, F ist Submersion und $F^{-1}(0) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von Dimension 1. Es gibt drei Punkte $(x,y,z) \in \partial D$ mit $y = 0$, nämlich $(R,0,0)$ und $(0,0,\pm R)$. Um zu entscheiden, welche der Punkte singulär sind und welche nicht, betrachten wir das Urbild von ∂D in spährischen Koordinaten

$$P : (-\pi,\pi) \times \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \ni (\varphi,\theta) \longmapsto (\underbrace{R\cos\varphi\cos\theta}_{x}, \underbrace{R\sin\varphi\cos\theta}_{y}, \underbrace{R\sin\theta}_{z}).$$

Weil $x^2+y^2 = Rx$ folgt $R^2\cos^2\theta = R^2\cos\varphi\cos\theta$. Dann ist $\cos\theta = 0$ und somit $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ oder $\cos\theta = \cos\varphi \Rightarrow \theta = \pm\varphi$. In jeder Umgebung von $P^{-1}(R,0,0) = (0,0)$ besteht das Urbild aus den zwei gekreuzten Geraden $\theta = \varphi$ und $\theta = -\varphi$ und ist somit weder ein Graph über die φ-Achse noch über die ϑ-Achse. Damit ist das Urbild bei $(0,0)$ keine Untermannigfaltigkeit der $\mathbb{R}^2$ und somit ist auch D keine Untermannigfaltigkeit bei $(R,0,0)$. Die anderen beiden Punkte sind regulär, denn ihre Umgebungen lassen sich mit Hilfe von $\theta = \varphi = t$ oder $\theta = -\varphi = -t$ parametrisieren:

$$\begin{aligned} (0,0,R) = P\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) :& \quad (0,\pi) \ni t \longmapsto (\cos t\cos t, \sin t\cos t, \sin t) \\ (0,0,-R) = P\left(\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{2}\right) :& \quad (0,\pi) \ni t \longmapsto (\cos t\cos t, \sin t\cos t, -\sin t). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, $\dim V = n$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis und $\omega = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$. Für $v \in V$ definiere $v \lrcorner \omega \in \Lambda^{n-1} V^*$ durch $v \lrcorner \omega(v_1, \ldots, v_{n-1}) := \omega(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$ (inneres Produkt von ω mit dem Vektor v, man schreibt auch $i_v \omega = v \lrcorner \omega$).

a) Der *duale Vektor* zu $v \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist definiert durch $v^*(u) = \langle v, u \rangle$, $u \in V$. Zeigen Sie, dass

$$v^* \wedge \left(i_v \left(e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)\right) + i_v \left(v^* \wedge \left(e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)\right) = \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=\|v\|^2} e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*$$

für alle $k = 0, ..., n$ und geordneten Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$.

b) Nehmen wir an, dass $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Orthonormalbasis für ein Skalarprodukt ist. Zeigen Sie, dass $V \longrightarrow \Lambda^1 V^*$, $u \mapsto \omega^u = \langle u, \cdot \rangle$, ein Isomorphismus ist, und es gilt

$$\omega^u \wedge (v \lrcorner \omega) = \langle u, v \rangle \omega,$$

insbesondere $\omega^v \wedge (v \lrcorner \omega) = \|v\|^2 \omega$.

Lösung:

Zu a) Wir überprüfen die Aussage zuerst für Basisvektoren:

$$e_m^* \wedge \left(i_{e_n} \left(e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)\right) = \begin{cases} e_{\alpha_{n_0}}^* \wedge \left((-1)^{n_0+1} e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{\alpha_{n_0}}^*} \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*\right) & n = m = \alpha_{n_0} \\ \qquad = e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^* & \\ (-1)^{n_0+1} e_{\alpha_m}^* \wedge e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{\alpha_{n_0}}^*} \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^* & n = \alpha_{n_0},\ m \notin \alpha \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$i_{e_n} \left(e_m^* \wedge \left(e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)\right) = \begin{cases} e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^* & n = m \notin \alpha \\ (-1)^{n_0} e_{\alpha_m} \wedge e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{\alpha_{n_0}}^*} \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^* & n = \alpha_{n_0},\ m \notin \alpha \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Addiert man beide Ergebnisse, so heben sich die zweiten Zeilen gerade auf und die ersten beiden Zeilen ergänzen sich zu:

$$e_m^* \wedge \left(i_{e_n} \left(e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)\right) + i_{e_n} \left(e_m^* \wedge \left(e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)\right) = e_{\alpha_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_k}^*$$

Die Aussage folgt nun einfach aus der Linearität, denn sowohl das $\wedge$-Produkt, als auch die Einbettung ist linear.

Zu b) Ist $\omega^u \equiv 0$, dann auch $0 = w^u(u) = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$ und somit $u = 0$. Damit ist die Abbildung $u \mapsto \omega^u$ injektiv. Sie ist auch bijektiv, da $\dim V^* = \dim V$.

Für $u = \sum_{j=1}^n u_j e_j$ ist $\omega^u = \sum_{j=1}^n u_j e_j^*$ und

$$\begin{aligned}\omega^u \wedge (v \lrcorner \omega) &= \sum_{j=1}^n u_j e_j^* \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v_k e_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{e_k^*} \wedge \ldots \wedge e_n^* \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{kj} (-1)^{k+1} (-1)^{k-1} u_j v_k e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^* \\ &= \sum_{k=1}^n u_k v_k e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^* = \langle u, v \rangle \omega\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit.

a) Seien $A, B \subset M$, wobei A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es $f \in C^\infty(M)$ gibt mit kompaktem Träger, so dass $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

b) Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $W \supset M$ in $\mathbb{R}^N$ und $F \in C^\infty(W, \mathbb{R}^k)$ existiert, so dass $F|_M = f$. Falls M abgeschlossen ist, zeigen Sie, dass $W = \mathbb{R}^N$ gewählt werden kann.

Lösung:

Zu a) Wir finden zunächst eine relativ kompakte offene Teilmenge $U \subset M$ mit $A \cap U = \emptyset$, $B \subset U$. Da A abgeschlossen ist, folgt

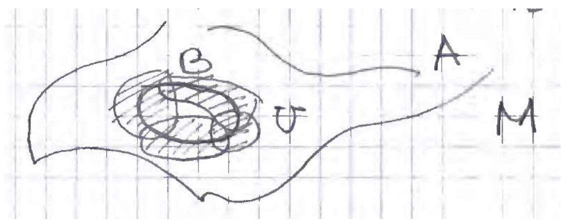
$$\forall x \in B \ \exists\, U_x \text{ offen}, \ x \in U_x, U_x \cap A = \emptyset.$$

U_x kann als Bild einer Kugel in $\mathbb{R}^n$ durch eine Parametrisierung gewählt werden, also ist U_x relativ kompakt ($\Leftrightarrow \overline{U_x}$ kompakt), da Kugeln in $\mathbb{R}^n$ relativ kompakt und Parametrisierungen Homöomorphismen sind. Da B kompakt ist, gibt es endlich viele $U_{x_1}, \ldots, U_{x_p} : B \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_p} =: U$. Daraus folgt, dass $\overline{U} = \overline{U_{x_1}} \cup \ldots \cup \overline{U_{x_p}}$ kompakt ist und $B \subset U$, $A \cap U = \emptyset$. Sei $\{\varphi_k\}$ eine Zerlegung der Eins untergeordnet zur offenen Überdeckung $\{U, M \backslash B\}$ von M. Sei

$$f = \sum_{\operatorname{supp} \varphi_k \subset U} \varphi_k \ \Rightarrow \ \operatorname{supp} f \subset U \ \overset{\operatorname{supp} f \text{ abg.}}{\Longrightarrow} \ \operatorname{supp} f \subset \overline{U} \text{ kompakt } \Rightarrow \ \operatorname{supp} f \text{ kompakt.}$$

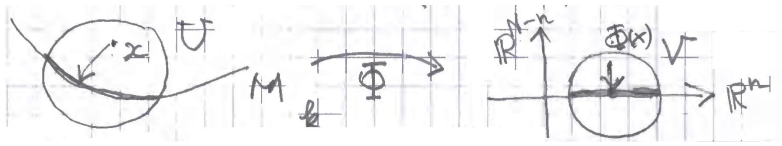
Außerdem ist $A \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$ also $f|_A = 0$. Sei

$$g = \sum_{\operatorname{supp} \varphi_k \subset M \backslash B} \varphi_k \quad \Rightarrow \quad f + g = 1 \text{ und } g|_B = 0 \text{ also } f|_B = 1.$$



Zu b) Wir zeigen zunächst, dass f *lokal* fortgesetzt werden kann. Sei $p \in M$ und $U \subset \mathbb{R}^N$ offen mit $p \in U$ wie in der Definition der Bügelbarkeit:

$$\exists \Phi : U \to V \text{ Diffeo.: } U \cap M = \Phi^{-1}\left(V \cap \{y_{n+1} = \ldots = y_N = 0\}\right).$$

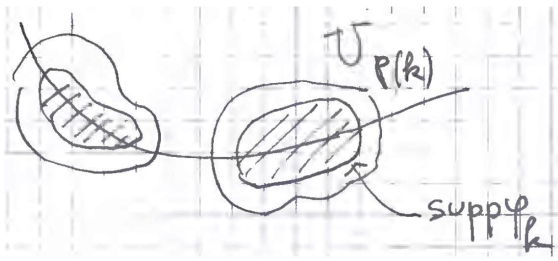


Setze

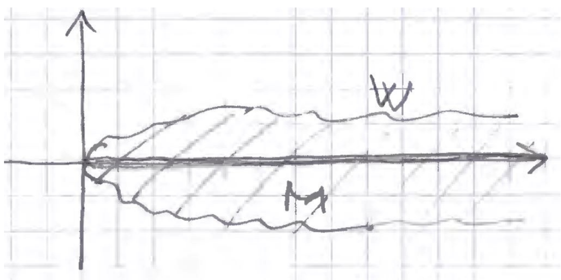
$$f_U : U \to \mathbb{R},\ f_U(x) = f\left(\Phi^{-1}\left(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x), \overbrace{0, \ldots, 0}^{N-m}\right)\right).$$

Dann ist $f_U \in \mathbb{C}^\infty(U),\ f_U|_M = f$.
Sei nun U_p eine Umgebung von $p \in M$ wie oben. Dann ist $W = \bigcup_{p\in M} U_p$ offen. Sei $f_p := f_{U_p}$ und $\{\varphi_k\}$ eine Zerlegung der Eins untergeordnet zur Überdeckung $\{U_p\}$ von W. Setze $f_W = \sum \varphi_k f_{U_{p(k)}}$, wobei $\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_{p(k)}$. Damit ist $f_W \in C^\infty(W)$, da die Summe lokal endlich ist. Für $x \in M$ folgt

$$f_W(x) = \sum \varphi_k(x) f_{U_{p(k)}}(x) = \sum \varphi_k(x) f(x) = f(x),\ \text{ da } \sum \varphi_k(x) = 1.$$



Ist M nicht abgeschlossen, können wir im Allgemeinen nicht alle f fortsetzen. Sei zum Beispiel $M = (0, \infty) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $f : M \to \mathbb{R},\ f(x, 0) = \frac{1}{x}$ Dann kann f nur in eine solche Umgebung fortgesetzt werden:



Ist M abgeschlossen, so ist $\{U_p, \mathbb{R}^N \backslash M\}$ offene Überdeckung von $\mathbb{R}^N$. Sei $\{\varphi_k\}$ eine dazu untergeordnete Zerlegung der Eins. Definiere

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbb{R}^k,\ \tilde{f} = \sum_{\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_{p(k)}} \varphi_k f_{U_{p(k)}} + \sum_{\operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathbb{R}^N \backslash M} \varphi_k \cdot 0.$$

Damit ist $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ und $\tilde{f}|_M = f$ (wie oben). Der Unterschied ist, dass $\tilde{f}$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ definiert werden kann.