Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 5 – Abgabe: 28. 11. - 1. 12. 2016 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Zeigen Sie, dass $D = \{ (x, x_{n+1}) \in U \times \mathbb{R} \,|\, x_{n+1} - f(x) \leq 0 \}$ eine glatt berandete Teilmenge von $M = U \times \mathbb{R}$ ist, und berechne das äußere Einheitsnormalenfeld.

b) Sei $M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = 2 \}$ und $D = \{ (x, y, z) \in M \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Zeigen Sie, dass D eine glatt berandete Teilmenge von M ist, und berechne das äußere Einheitsnormalenfeld ν. Berechne $T_{(x,y,z)}\partial D$ mit Hilfe einer Parametrisierung von ∂D und überprüfen Sie, ob $\nu(x, y, z) \perp T_{(x,y,z)}\partial D$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Die Viviani–Fläche D ist der Durchschnitt des Vollzylinders

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$

mit der Sphäre $S^2_R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$. Finden Sie die regulären und singulären Punkte von ∂D und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, $\dim V = n$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis und $\omega = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$. Für $v \in V$ definiere $v \lrcorner \omega \in \Lambda^{n-1}V^*$ durch $v \lrcorner \omega(v_1, \ldots, v_{n-1}) := \omega(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$ (inneres Produkt von ω mit dem Vektor v, man schreibt auch $i_v\omega = v \lrcorner \omega$).

a) Der *duale Vektor* zu $v \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist definiert durch $v^*(u) = \langle v, u \rangle$, $u \in V$. Zeigen Sie, dass

$$v^* \wedge \left(i_v \left(e^*_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{\alpha_k}\right)\right) + i_v \left(v^* \wedge \left(e^*_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{\alpha_k}\right)\right) = \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=\|v\|^2} e^*_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{\alpha_k}$$

für alle $k = 0, ..., n$ und geordneten Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$.

b) Nehmen wir an, dass $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Orthonormalbasis für ein Skalarprodukt ist. Zeigen Sie, dass $V \longrightarrow \Lambda^1 V^*$, $u \mapsto \omega^u = \langle u, \cdot \rangle$, ein Isomorphismus ist, und es gilt $\omega^u \wedge (v \lrcorner \omega) = \langle u, v \rangle \omega$, insbesondere $\omega^v \wedge (v \lrcorner \omega) = \|v\|^2 \omega$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit.

a) Seien $A, B \subset M$, wobei A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es $f \in C^\infty(M)$ gibt mit kompaktem Träger, so dass $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

b) Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $W \supset M$ in $\mathbb{R}^N$ und $F \in C^\infty(W, \mathbb{R}^k)$, so dass $F|_M = f$. Falls M abgeschlossen ist, zeige, dass $W = \mathbb{R}^N$ gewählt werden kann.