Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 6 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **8 Punkte**

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c \qquad \text{(Grassmann-Identität)}$$
$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \qquad \text{(Jacobi-Identität)}$$

b) Bezeichne mit (a, b, c) die 3×3- Matrix mit Spalten a, b, c.
Zeigen Sie: $\det(a, b, c) = \langle a \times b, c\rangle$.

c) Zeigen Sie die folgende Verschärfung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\langle a, b\rangle^2 + \|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2.$$

d) Sei $\theta_{a,b}$ der Winkel zwischen a und b, gegeben durch

$$\theta_{a,b} = \arccos\left(\frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\|a \times b\| = \|a\|\,\|b\| \sin\theta_{a,b}$ und dass, falls a, b linear unabhängig sind, $\|a \times b\|$ die Fläche des Parallelogramms ist, das in der Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ von a und b aufgespannt wird.

e) Seien a, b linear unabhängig und $p, q \in \mathbb{R}^3$. Sei

$$E(p; a, b) := p + \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$$

die 2-dimensionale affine Ebene durch p, die parallel zu $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ ist. Zeigen Sie, dass der Abstand des Punkts q von $E(p; a, b)$ ist

$$d(q, E) = \frac{|\langle a \times b, q - p\rangle|}{\|a \times b\|}.$$

f) Seien a, b, c linear unabhängig. Definiere das Volumen des Parallelotops $P(a, b, c)$ als das Produkt der Grundfläche von $P(a, b, c)$ in der Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ mit der Höhe durch c. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol} P(a, b, c) = |\langle a \times b, c\rangle| = |\det(a, b, c)|.$$

Lösung:
Zuerst leiten wir die eventuell schon bekannte Formel für Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ her:

$$\begin{aligned}
a \times b &= \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} e_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) - e_2 \cdot (a_1b_3 - a_3b_1) + e_3 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zu a)

$$\begin{aligned}
a \times (b \times c) = a \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1 \\ (a_3c_3 + a_1c_1)b_2 - (a_3b_3 + a_1b_1)c_2 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (a_1b_1 - a_2b_2)c_3 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \\
&\qquad \overset{a)}{=} \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c + \langle b, a\rangle c - \langle b, c\rangle a + \langle c, b\rangle a - \langle c, a\rangle b \overset{\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle}{=} 0
\end{aligned}$$

Zu b)

$$\begin{aligned}
\langle a \times b, c\rangle &= \left\langle \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}, c \right\rangle \\
&\overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} \langle e_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) - e_2 \cdot (a_1b_3 - a_3b_1) + e_3 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1), c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3\rangle \\
&= c_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) - c_2 \cdot (a_1b_3 - a_3b_1) + c_3 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) = \det(a, b, c)
\end{aligned}$$

Zu c)

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_1a_3b_3 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 \\
&= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&\quad - (a_1b_1(a_2b_2 + a_3b_3) + a_2b_2(a_1b_1 + a_3b_3) + a_3b_3(a_1b_1 + a_2b_2)) \\
&\quad + a_1^2b_1^2 - a_1b_1a_1b_1 + a_2^2b_2^2 - a_2b_2a_2b_2 + a_3^2b_3^2 - a_3b_3a_3b_3 \\
&= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (a_1b_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + a_2b_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + a_3b_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)) \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2
\end{aligned}
$$

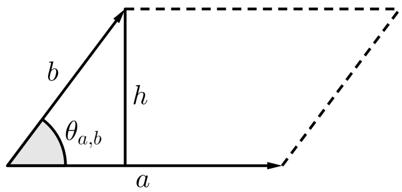
Zu d) Da

$$-1 \leq \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|} \leq 1$$

liegt $\theta_{a,b}$ zwischen 0 und 2π, was geometrisch sinnvoll ist. Damit ist $\sin\theta_{a,b} \in [0, 1]$. Weiterhin folgt direkt aus der Definition $\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta_{a,b}$ und somit

$$
\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &\overset{c)}{=} \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \left(1 - \cos^2\theta_{a,b}\right) = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\theta_{a,b} \\
&\overset{\sin\theta_{a,b}>0}{\Longleftrightarrow} \|a\|\|b\| \sin\theta_{a,b}
\end{aligned}
$$

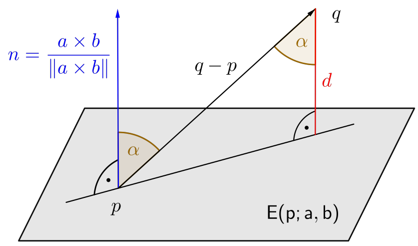
Nur wenn a und b linear unabhängig sind spannen sie ein Parallelogramm auf. Nach der Definition des Sinus ist Höhe des Parallelogramms auf der Seite a gegeben durch $h = \|b\| \sin\theta_{a,b}$ und die Fläche des Parallelogramms F ist



$$F = h \cdot \|a\| = \|a\|\|b\| \sin\theta_{a,b}.$$

Zu e) Der Vektor $a \times b$ steht senkrecht auf a und b:

$$
\begin{aligned}
\langle a \times b, a\rangle &\overset{b)}{=} \det(a, b, a) = 0, \\
\langle a \times b, b\rangle &\overset{b)}{=} \det(a, b, b) = 0
\end{aligned}
$$



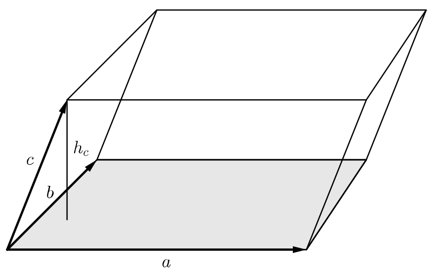
Damit ist $n = \frac{a \times b}{\|a \times b\|}$ ein Normalenvektor der Ebene $E(p; a, b)$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
&\frac{d(q, E)}{\|q - p\|} = \cos\alpha = \frac{|\langle n, q - p\rangle|}{\|n\|\|q - p\|} = \frac{|\langle n, q - p\rangle|}{\|q - p\|} && | \cdot \|q - p\| \\
\Leftrightarrow \quad & d(q, E) = |\langle n, q - p\rangle| = \left|\left\langle \frac{a \times b}{\|a \times b\|}, q - p\right\rangle\right| = \frac{|\langle a \times b, q - p\rangle|}{\|a \times b\|}
\end{aligned}
$$

Zu f) Die Höhe h_c durch c ist gegeben durch

$$h_c = d(0, c) \overset{e)}{=} \frac{|\langle a \times b, c - 0\rangle|}{\|a \times b\|}$$

Die Grundfläche ist das von a und b aufgespannte Parallelogramm des Fläche nach d) $\|a \times b\|$ ist. Damit ergibt sich



$$\operatorname{vol} P(a, b, c) = \|a \times b\| \cdot \frac{|\langle a \times b, c - 0\rangle|}{\|a \times b\|} = |\langle a \times b, c - 0\rangle| \overset{b)}{=} |\det(a, b, c)|$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Sei $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ eine geschlossene 1–Form auf $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $d\alpha = \omega$, wobei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $d\eta = y\,dx \wedge dy$, wobei $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

c) Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ die 1–Form

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\;.$$

Beweisen Sie, daß ω geschlossen aber nicht exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist. Geben Sie eine (möglichst große) offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an, auf der ω exakt ist.

Lösung:
Zu a) Es gilt

$$d\alpha = \omega \Longleftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} = f\,,\ \ \frac{\partial \alpha}{\partial y} = g \tag{$\star$}$$

Durch Integration

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) = f(x,y) \rightsquigarrow \alpha(x,y) = \int_0^x f(t,y)dt + \alpha(0,y) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) = g(x,y) \rightsquigarrow \alpha(x,y) = \int_0^y g(x,t)dt + \alpha(x,0) \tag{2}$$

Substituiere (2) mit $y = 0$ in (1) liefert:

$$\alpha(x,y) = \int_0^x f(t,y)dt + \int_0^y g(0,t)dt + \alpha(0,0)\,. \tag{3}$$

Aber α erfüllt ($\star$) genau dann, wenn

$$d\omega = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{$\star\star$}$$

Durch Differentiation in (3) folgt sofort $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = f(x,y)$ und

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)dt + g(0,y) \overset{(\star\star)}{=} \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(t,y) + g(0,y)\\ &= g(x,y) - g(0,y) + g(0,y) = g(x,y).\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist:

$$\left\{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) : \alpha(x,y) = \int_0^x f(t,x)dt + \int_0^y g(0,t)dt + C, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Alternativ kann man die Formel aus der Vorlesung zum Beweis des Poincaré-Lemmas benutzen.

Zu b): Die notwendige Bedingung: $0 = d(ydx \wedge dy) = dy \wedge dx \wedge dy = 0$ ist erfüllt. Sei $\eta = fdx + gdy$ mit $d\eta = ydx \wedge dy$ also

$$\Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) dx \wedge dy = ydx \wedge dy \Longleftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad g(x,y) &= \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(t,y)dt + g(0,y) \overset{h(y):=g(0,y)}{=} \int_0^x \left(y + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right) dt + h(y) \\ &= xy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_0^x f(t,y)dt + H(y) \right), \qquad (\star) \end{aligned}$$

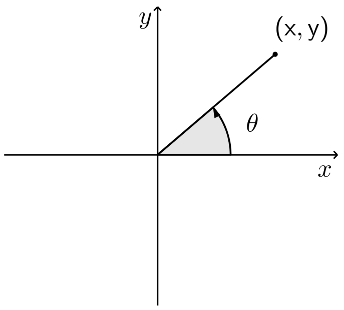
wobei H eine beliebige Stammfunktion von $h(y) = g(0,y)$ ist. Wählen wir andererseits f und H beliebig so rechnet man schnell nach, dass $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = y$, wenn g wie in $(\star)$ gebildet wird.
Somit ist die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} &\left\{ f\ dx + \left(xy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x\ f(t,y)\ dt + H(y) \right)\right) dy : f \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ H \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x\ f(t,y)\ dt + H(y) \right) dx + \left(xy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x\ f(t,y)\ dt + H(y) \right)\right) dy \right. \\ &\qquad \left. : f \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ H \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ d\left(\int_0^x\ f(t,y)\ dt + H(y) \right) + xy\, dy : f \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ H \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ d\alpha + xy\, dy : \alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \right\} \end{aligned}$$

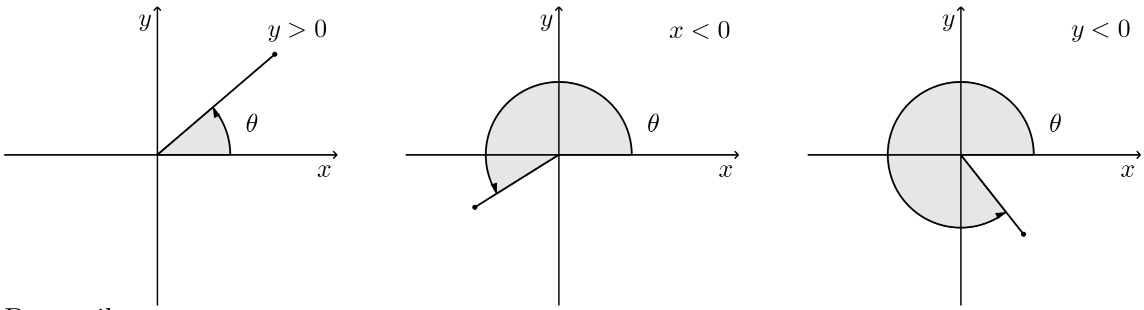
Diese Integration kann man sich so sparen: Wähle eine offensichtliche Speziallösung: $f = 0$, $g = xy$ also $\eta = xy\, dy$. Sei η_1 eine andere Lösung. Dann $d(\eta - \eta_1) = 0$. Das Poincaré-Lemma $\rightsquigarrow \exists\ \alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $d\alpha = \eta - \eta_1 \rightsquigarrow$ die Lösungsmenge ist

$$\left\{ xy\ dy + d\alpha : \alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Zu c) Sei $\arg : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\} \to (0, 2\pi)$ der Hauptzweig des Argumentes:



$$\arg(x,y) = \theta = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & , y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & , x < 0 \\ \pi + \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & , y < 0. \end{cases}$$



Dann gilt

$$d\arg(x,y) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \omega \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}\,.$$

Nehmen wir an, es existiert ein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ mit $df = \omega$. Dann gilt

$df = d\arg \quad \Rightarrow \quad d(f - \arg) = 0 \quad \Rightarrow \quad f - \arg = C \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$
$\Rightarrow \quad \arg = f + C$

Damit gäbe es eine stetige Fortsetzung von arg auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, was bekanntermaßen nicht der Fall ist. ϟ

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert als Bild der Funktion

$$f : (-1,1) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(t,\vartheta) = \left(2\cos\vartheta + t\cos\tfrac{\vartheta}{2}\cos\vartheta, 2\sin\vartheta + t\cos\tfrac{\vartheta}{2}\sin\vartheta, t\sin\tfrac{\vartheta}{2}\right).$$

Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist.

Lösung:

Angenommen M wäre orientierbar. Sei ω eine nirgends verschwindende 2-Form auf M. Da $f : (-1,1) \times \mathbb{R} \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $f * \omega$ eine nirgends verschwindende 2-Form auf $(-1,1) \times \mathbb{R}$ und

$$f * \omega = \lambda(t,\theta) dt \wedge d\theta \quad \text{mit} \quad \lambda(t,\theta) \neq 0 \quad \text{für alle } (t,\theta) \in (-1,1) \times \mathbb{R}.$$

Da $(-1,1) \times \mathbb{R}$ zusammenhängend ist, gilt $\lambda(t,\theta) > 0$ für alle (t,θ) oder $\lambda(t,\theta) < 0$ für (t,θ).

Das bedeutet, $df(t,\theta)$ ist entweder orientierungserhaltend für alle (t,θ) oder orientierungsumkehrend für alle (t,θ). (1)

Dazu berechnen wir

$$df(t,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta & \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta & \sin\frac{\vartheta}{2} \\ -\sin\vartheta - \frac{t}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta + t\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta & 2\cos\vartheta - \frac{t}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta + t\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta & t\cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

Für die Punkte $(0,0)$, $(0,2\pi)$ gilt $f(0,0) = f(0,2\pi) = (2,0,0)$.

$$df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

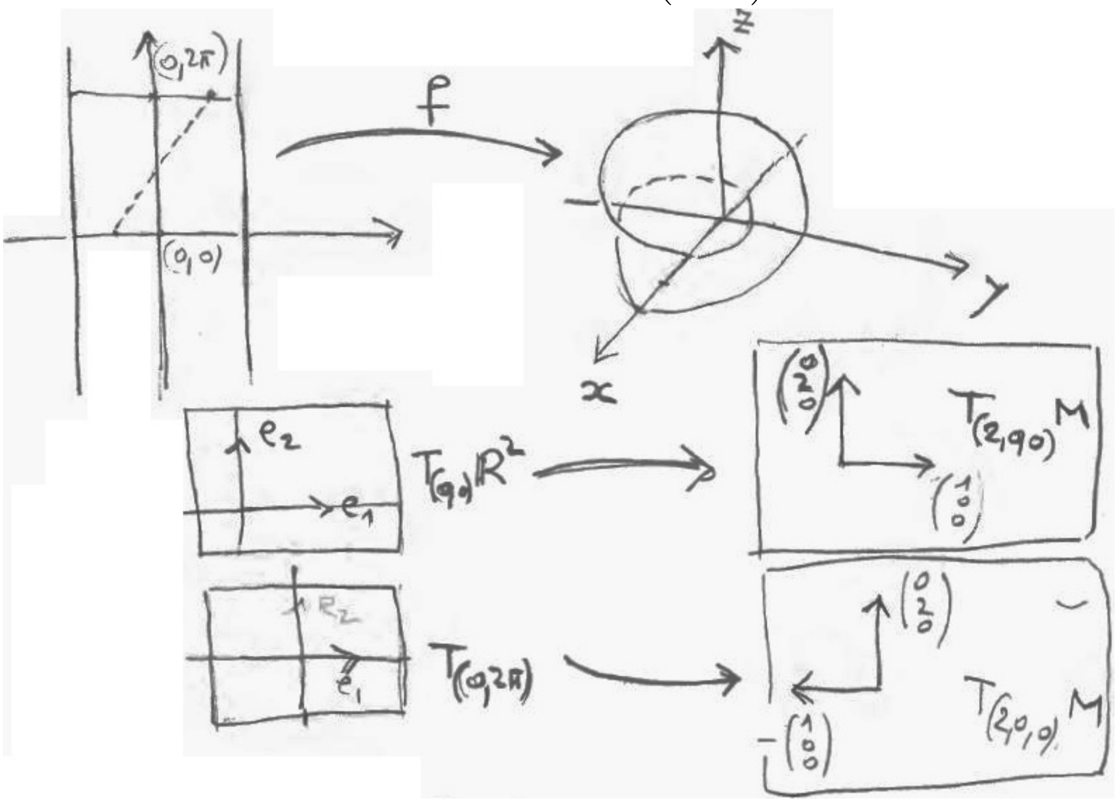
bildet die positiv-orientierte Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ von } T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \text{ in } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ ab}$$

und

$$df(0,2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bildet dieselbe Basis in } \left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ ab.}$$

Da nach (1) die Abbildung entweder orientierungserhaltend oder -umkehrend ist müssten die beiden Basen gleich orientiert sein. Das ist ein Widerspruch, denn die Basistransformationsmatrix zwischen diesen Basen ist $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Determinante $-1 < 0$.



Alternativer Beweis: Sei $T : (-1,1) \times \mathbb{R} \to (-1,1) \times \mathbb{R},\ T(t,\theta) = (-t, \theta + 2\pi)$ Dann gilt

$$f \circ T = f \quad \Rightarrow \quad f^* = T^* f^* \quad \Rightarrow \quad f^*\omega = T^* f^* \omega \quad \overset{\alpha := f^*\omega}{\Longrightarrow} \quad T^*\alpha = \alpha.$$

Sei $\alpha = \lambda(t,\theta) dt \wedge d\theta$. Dann ist

$$\alpha = T^*\alpha = \lambda(-t, \theta + 2\pi) d(-t) \wedge d(\theta + 2\pi) = -\lambda(-t, \theta + 2\pi) dt \wedge d\theta$$

und $\lambda(t,\theta) = -\lambda(-t, \theta + 2\pi)$. Der Zwischenwertsatz impliziert, dass ein $(t_0, \theta_0) \in [(t,\theta), (-t, \theta + 2\pi)]$ existiert mit $\lambda(t_0, \theta_0) = 0$. ↯