Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 6 – Abgabe: 5. 12. - 8. 12. 2016 in den Übungen

Aufgabe 1 **8 Punkte**

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c \qquad \text{(Grassmann-Identität)}$$
$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \qquad \text{(Jacobi-Identität)}$$

b) Bezeichne mit (a, b, c) die 3×3- Matrix mit Spalten a, b, c.
Zeigen Sie: $\det(a, b, c) = \langle a \times b, c\rangle$.

c) Zeigen Sie die folgende Verschärfung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\langle a, b\rangle^2 + \|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2.$$

d) Sei $\theta_{a,b}$ der Winkel zwischen a und b, gegeben durch

$$\theta_{a,b} = \arccos\left(\frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\|a \times b\| = \|a\|\,\|b\| \sin\theta_{a,b}$ und dass, falls a, b linear unabhängig sind, $\|a \times b\|$ die Fläche des Parallelogramms ist, das in der Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ von a und b aufgespannt wird.

e) Seien a, b linear unabhängig und $p, q \in \mathbb{R}^3$. Sei

$$E(p; a, b) := p + \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$$

die 2-dimensionale affine Ebene durch p, die parallel zu $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ ist. Zeigen Sie, dass der Abstand des Punkts q von $E(p; a, b)$ ist

$$d(q, E) = \frac{|\langle a \times b, q - p\rangle|}{\|a \times b\|}.$$

f) Seien a, b, c linear unabhängig. Definiere das Volumen des Parallelotops $P(a, b, c)$ als das Produkt der Grundfläche von $P(a, b, c)$ in der Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ mit der Höhe durch c. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol} P(a, b, c) = |\langle a \times b, c\rangle| = |\det(a, b, c)|.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Sei $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ eine geschlossene 1–Form auf $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $d\alpha = \omega$, wobei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $d\eta = y\,dx \wedge dy$, wobei $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

c) Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ die 1–Form

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \ .$$

Beweisen Sie, daß ω geschlossen aber nicht exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist. Geben Sie eine (möglichst große) offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an, auf der ω exakt ist.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert als Bild der Funktion

$$f : (-1,1) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(t,\vartheta) = \left(2\cos\vartheta + t\cos\tfrac{\vartheta}{2}\cos\vartheta, 2\sin\vartheta + t\cos\tfrac{\vartheta}{2}\sin\vartheta, t\sin\tfrac{\vartheta}{2}\right).$$

Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist.