**Analysis III – Winter 2016/17**
**Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann**
**Serie 7 mit Musterlösungen**

---

**Aufgabe 1** **4 Punkte**

Zeigen Sie: Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann orientierbar, wenn auf $M$ ein glattes Einheitsnormalenfeld existiert, d.h. eine glatte Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\nu(x) \in N_xM$ und $\|\nu(x)\| = 1$ für alle $x \in M$.

*Tipp: Für eine positiv orientierte Karte* $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ *setze* $\nu(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}}{\left\|\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}\right\|}$.

**Lösung:**

„$\Leftarrow$": Wir nehmen an, dass ein glattes Einheitsnormalenfeld existiert, d.h. eine glatte Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\nu(x) \in N_xM$ und $\|\nu(x)\| = 1$ für alle $x \in M$. Nach Definition 12.4.1 ist zu zeigen, dass eine nirgends verschwindende $n$-Form existiert. Betrachte die $n$-Form auf $M$ definiert durch

$$\eta(x)(v_1, \ldots, v_n) = (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1})(\nu(x), v_1, \ldots, v_n) = \det(\nu(x), v_1, \ldots, v_n)$$

wobei $x \in M$, $v_1, \ldots, v_n \in T_xM$. Weil $\nu$ glatt ist, ist auch $\eta$ glatt, $\eta \in \Omega^n(M)$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $T_xM$. Da $\nu(x) \perp T_xM$ und $\nu(x) \neq 0$, sind

$$\nu(x), v_1, \ldots, v_n$$

linear unabhängig, d.h $\eta(x)(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ und $\eta(x) \in \Lambda^n T_x^*M \setminus \{0\}$ für alle $x \in M$. Außerdem ist $M$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es folgt, dass $M$ orientierbar ist.

„$\Rightarrow$": Nehmen wir an, dass $M$ orientierbar ist und definiere wie im Tip,

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}}{\left\|\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}\right\|}.$$

Nach Definition des Kreuzproduktes gilt

$$\left\langle \nu(x), \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle}{\left\|\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}\right\|} = \frac{\omega_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)}{\left\|\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}\right\|} = 0,$$

da $\omega_{\mathbb{R}^n}$ alternierend ist. Damit ist $\nu(x) \in N_xM$ für alle $x \in M$. Offensichtlich gilt auch $\|\nu(x)\| = 1$ und für die kanonische Basis $e_1, \ldots, e_{n+1}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}}{\left\|\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}\right\|} = \frac{\det\begin{pmatrix} e_1 & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, e_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n}, e_1 \right\rangle \\ e_2 & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, e_2 \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n}, e_2 \right\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n+1} & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, e_{n+1} \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n}, e_{n+1} \right\rangle \end{pmatrix}}{\left\|\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}\right\|}.$$

Da $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k}(x)$ glatt ist, impliziert die obige Darstellung, dass $\nu$ glatt ist (in der Determinante tauchen nur Produkte auf).
Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine positiv orientierte Basis von $T_xM$ und setze

$$\tilde{\nu}(x) = v_1 \times \cdots \times v_n \,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}(\langle \tilde{\nu}(x), \nu(x) \rangle) &= \operatorname{sign}(dV_{\mathbb{R}_{n+1}}(\nu(x), v_1, \ldots, v_n)) \\
&= \operatorname{sign}(dV_{\mathbb{R}_{n+1}}(\nu(x), \tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n})) \\
&= \operatorname{sign}\left( \left\| \tfrac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \tfrac{\partial}{\partial x_n} \right\| \langle \nu(x), \nu(x) \rangle \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Wegen $\dim N_xM = 1$ folgt daraus, dass $\nu(x)$ unabhängig von der Wahl der positiv orientierten Karte ist. $\square$

**Aufgabe 2** **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass folgende Untermannigfaltigkeiten orientierbar sind. Wählen Sie eine Orientierung und berechnen Sie jeweils eine lokale Darstellung der Volumenform.

a) *Bizylinderkurve:* $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \,,\, y^2 + z^2 = 2 \}$.

b) *Rotationsfläche:* $R_f = \{ (f(z)\cos\varphi, f(z)\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, z) \in \mathbb{R} \times (a, b) \}$, wobei $f \in C^\infty((a, b))$ und $f > 0$.

c) *Wendelfläche:* $W = \{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 \}$.

d) *Graph einer Funktion* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *:* $G_f = \{ (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}$.

**Lösung:**
**Zu a):** Die Bizylinderkurve ist die Lösungsmenge von zwei global definierten unabhängigen Gleichungen, also nach Satz 12.4.3 orientierbar.
Eine Orientierung ist gegeben durch die 1-Form

$$\eta = \operatorname{grad} f_1 \lrcorner (\operatorname{grad} f_2 \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^3}) \,,$$

wobei $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ und $f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2$. Eine Parametrisierung von $C$ ergibt sich, indem wir $x = \cos t,\ y = \sin t$ setzen und $z$ dazu aus der zweiten Gleichung ermitteln: $z = \pm\sqrt{2 - \sin^2 t}$. Also

$$\gamma : (0, 2\pi) \to C, \quad t \mapsto \left(\cos t, \sin t, \pm\sqrt{2 - \sin^2 t}\right), \quad \gamma'(t) = \left(-\sin t, \cos t, \mp\frac{\cos t \sin t}{\sqrt{2 - \sin^2 t}}\right)$$

und die Volumenform ist:

$$\varepsilon(\gamma)\|\gamma'(t)\|dt = \varepsilon(\gamma)\left(1 + \frac{\cos^2 t \sin^2 t}{2 - \sin^2 t}\right).$$

Das Vorzeichen der Volumenform berechnet man, indem man das Vorzeichen von

$$\eta \cdot \gamma'(t) = \omega_{\mathbb{R}^3}\left(\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2, \gamma'(t)\right) = \begin{vmatrix} 2\cos t & 0 & -\sin t \\ 2\sin t & 2\sin t & \cos t \\ 0 & \pm\sqrt{2-\sin^2 t} & \mp\frac{\cos t \sin t}{\sqrt{2-\sin^2 t}} \end{vmatrix}$$

ermittelt. Auf jeder Zusammenhangskomponente ist das Vorzeichen konstant, also ermittelt man es, wenn man $t = \frac{\pi}{2}$ setzt. Es folgt $\varepsilon(\gamma) = -1$ für die Komponente mit $z = \sqrt{2-\sin^2 t}$ und $\varepsilon(\gamma) = 1$ für $z = -\sqrt{2-\sin^2 t}$.

**Zu b):** Die Rotationsfläche ist gegeben durch eine (unabhängige) Gleichung. Sie ist also orientierbar wegen Satz 12.4.3. Wir parametrisieren die Rotationsfläche $R_f$ um einen Punkt durch

$$\phi(\varphi, z) = (f(z)\cos\varphi, f(z)\sin\varphi, z)\,,$$

wobei $\varphi \in (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$ und $z \in (a, b)$. Als Orientierung auf $R_f$ wähle wir die durch die Basis $(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(\varphi, z), \frac{\partial\phi}{\partial z}(\varphi, z))$ in den Tangentialräumen $T_{\phi(\varphi,z)}R_f$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(\varphi, z) &= (-f(z)\sin\varphi, f(z)\cos\varphi, 0)\,, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(\varphi, z) &= \left(f'(z)\cos\varphi, f'(z)\sin\varphi, 1\right). \end{aligned}$$

Für die Koeffizientenmatrix der induzierten Metrik erhalten wir

$$(g_{ij}(\phi(\varphi, z))) = \begin{pmatrix} f(z)^2 & 0 \\ 0 & f'(z)^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt die lokale Darstellung der Volumenform

$$dR_f = f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}\, d\varphi \wedge dz.$$

**Zu c):** Die Wendelfläche ist gegeben durch eine einzige Parametrisierung $\psi$, sie ist also orientierbar, denn

$$\omega = (\phi^{-1})^*(d\varphi \wedge d\varphi_2)$$

ist eine nicht-verschwindende 2-Form auf $W$. Parametrisierung von $W$:

$$\phi(\varphi, r) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$$

Kanonische Basis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(\varphi, z) &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial r}(\varphi, z) &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix der induzierten Metrik:

$$(g_{ij}(\phi(\varphi, r))) = \begin{pmatrix} r^2+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volumenform (bei Orientierung wie bei a):

$$dW = \sqrt{r^2+1} d\varphi \wedge dr.$$

**Zu d)** Graph einer Funktion $f$:
Der Graph ist auch gegeben durch eine einzige Parametrisierung, man also wie in 2c) argumentieren.
Parametrisierung von $Graph(f)$:

$$\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

Kanonische Basis:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$$

Koeffizientenmatrix der induzierten Metrik:

$$(g_{ij} \circ \phi) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \det(g_{ij} \circ \phi) &= \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \\ &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

Volumenform (bei Orientierung durch $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$:

$$d\,Graph(f) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} du \wedge dv$$

**Aufgabe 3** **4 Punkte**

Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $f \in C^\infty(U)$ eine Funktion und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld.

a) Zeigen Sie:

   i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ und

   ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

b) Wir nehmen an, dass $U$ sternförmig ist. Zeigen Sie:

   i) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} F = 0$ existiert ein Potential $h : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} h = F$.

   ii) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} F = 0$ existiert ein Vektorfeld $G \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} G = F$.

**Lösung:**

**Zu a):** Man erhält i) und ii) durch direktes Rechnen mit Hilfe folgender (in $\mathbb{R}^3$ gültigen) Konventionen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \partial f/\partial x_3)^T \\
\operatorname{rot} F &= \nabla \times F \\
&= (\partial F_3/\partial x_2 - \partial F_2/\partial x_3, \partial F_1/\partial x_3 - \partial F_3/\partial x_1, \partial F_2/\partial x_1 - \partial F_1/\partial x_2)^T \qquad (1) \\
\operatorname{div} F &= \nabla \cdot F \\
&= \partial F_1/\partial x_1 + \partial F_2/\partial x_2 + \partial F_3/\partial x_3
\end{aligned}$$

für $f \in C^\infty(U)$ und $F = (F_1, F_2, F_3)^T \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$. Eine andere Möglichkeit i) und ii) zu zeigen, ist folgendes Diagramm zu verwenden

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0(U) & \stackrel{d}{\to} & \Omega^1(U) & \stackrel{d}{\to} & \Omega^2(U) & \stackrel{d}{\to} & \Omega^3(U) \\
\uparrow \Psi_0 & \circlearrowleft & \uparrow \Psi_1 & \circlearrowleft & \uparrow \Psi_2 & \circlearrowleft & \uparrow \Psi_3 \\
C^\infty(U) & \stackrel{\text{grad}}{\to} & \Gamma(TU) & \stackrel{\text{rot}}{\to} & \Gamma(TU) & \stackrel{\text{div}}{\to} & C^\infty(U)
\end{array}$$

wobei $\Psi_0, \dots, \Psi_3$ Isomorphismen sind, definiert durch

$$\Psi_0(f) = f, \quad (\Psi_1(F))(X) = \langle F, X \rangle, \quad \Psi_2(F) = F \lrcorner \omega \quad \Psi_3(f) = f\omega$$

für $f \in C^\infty(U)$, $F, X \in \Gamma(TU)$ ($\Gamma(TU) \simeq C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ da $U \subset \mathbb{R}^3$ offen ist) bzgl. der Standard-Riemann-Metrik ($\langle F, X \rangle = F_1X_1 + F_2X_2 + F_3X_3$) und der Standard-Volumenform (bzw. Orientierung) $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ auf $\mathbb{R}^3$. Mit den Definitionen von Gradient Rotation und Divergenz in (1) kommutiert das Diagramm. Dann ergeben sich i) und ii) aus $d \circ d = 0$ wie folgt:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \Psi_2^{-1}(d\Psi_1(\Psi_1^{-1}(d\Psi_0(f)))) = \Psi_2^{-1}((d \circ d)f) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \Psi_3^{-1}(d\Psi_2(\Psi_2^{-1}(d\Psi_1(F)))) = \Psi_3^{-1}((d \circ d)\Psi_1(F)) = 0.$$

**Zu b):** Die Ausagen i) und ii) folgen mit Hilfe des obigen Diagramms und dem Fakt, dass auf sternförmigen Gebieten im $\mathbb{R}^n$ jede geschlossene Differentialform exakt ist.

i) Für $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} F = 0$ erhalten wir $d\Psi_1(F) = 0$ und somit ist $\Psi_1(F)$ geschlossen. Da $U$ sternförmig ist, ist $\Psi_1(F)$ exakt, d.h. es existiert $h \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ mit $dh = \Psi_1(F)$ und man rechnet

$$\operatorname{grad} h = \Psi_1^{-1}(dh) = \Psi_1^{-1}(\Psi_1(F)) = F.$$

ii) Für $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} F = 0$ erhalten wir $d\Psi_2(F) = 0$ und somit ist $\Psi_2(F)$ geschlossen. Da $U$ sternförmig ist, ist $\Psi_2(F)$ exakt, d.h. es existiert $\alpha \in \Omega^1(U)$ mit $d\alpha = \Psi_2(F)$ und man rechnet

$$\operatorname{rot} \Psi_1^{-1}(\alpha) = \Psi_2^{-1}(d\alpha) = \Psi_2^{-1}(\Psi_2(F)) = F.$$

Mit $G = \Psi_1^{-1}(\alpha)$ folgt die Behauptung.

**Zusatzaufgabe** **+5 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Es sei $E = E(x,t) : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das elektrische Feld und $H = H(x,t) : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld. Dabei bezeichnen wir die Punkte des $\mathbb{R}^3$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und mit $t \in \mathbb{R}$ die Zeit. Die Operationen der Divergenz und Rotation auf die räumlichen Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3$ der zeitabhängigen Vektorfelder bezeichnen wir mit $\operatorname{div}_x$ bzw. $\operatorname{rot}_x$. Im Vakuum lauten die ersten Maxwellschen Gleichungen (bei geeigneter Normierung):

$$\operatorname{rot}_x E = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{div}_x H = 0 \ .$$

Wir definieren folgende 2–Form in $\mathbb{R}^4$:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{3} E_j(x,t)\, dx_j \wedge dt + H(x,t) \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^3} \ , \quad \text{wobei} \ \ \omega_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Maxwellschen Gleichungen äquivalent zu $d\Omega = 0$ sind.

b) Sei $V \subset U \times \mathbb{R}$ ein sternförmiges Gebiet. Zeigen Sie, dass es ein magnetisches Vektorpotential $A = A(x,t) \in C^\infty(V, \mathbb{R}^3)$ und ein skalares Potential $a = a(x,t) \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\operatorname{rot}_x A = H \quad , \quad \operatorname{grad}_x a - \frac{\partial A}{\partial t} = E \ . \tag{$*$}$$

c) Sei $(a_0, A_0)$ eine Lösung von $(*)$. Zeigen Sie, dass alle andere Lösungen von der Form

$$(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi)$$

sind, mit einer Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}$ (Freiheit der Eichung).

d) Nehmen wir an, dass die Eichbedingung $\frac{\partial a}{\partial t} = \operatorname{div}_x A$ gilt. Zeigen Sie, dass $A$ der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta_x A = 0$$

genügt. Dabei wirken die Differentialoperatoren komponentenweise.
*Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass* $\operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x A + \Delta_x A = \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x A$, *und nutzen Sie dabei eine weitere Maxwellsche Gleichung:* $\operatorname{rot}_x H = \frac{\partial E}{\partial t}$.

e) Sei $(a_0, A_0)$ eine Lösung der Gleichung $(*)$ und $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_x \varphi = -\frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div}_x A_0.$$

Beweisen Sie, dass $(a, A) = (a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi)$ die Eichbedingung erfüllt.

**Lösung:**
**Zu a)** Wir führen die Notation $d = d_{(x,t)} = d_x + d_t$ ein, wobei

$$d_x = \sum_{j=1}^{3} dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad d_t = dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}.$$

[Diese Operatoren wirken folgendermaßen: Zuerst werden die Koeffizienten abgeleitet und dann wird das äußere Produkt mit dr entsprechenden Form gebildet.] Mit der Notation in der Lösung zu Aufgabe 3 schreibt man

$$\Omega = \Psi_1(E) \wedge dt + \Psi_2(H)$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial t}(\omega_{\mathbb{R}^3}) = 0$ gilt $d_t\Psi_2(H) = dt \wedge \Psi_2(\frac{\partial H}{\partial t})$ und man rechnet

$$\begin{aligned}
d\Omega &= (d_x\Psi_1(E)) \wedge dt - \frac{\partial}{\partial t}\Psi_1(E)\underbrace{dt \wedge dt}_{=0} + d_x\Psi_2(H) + dt \wedge \Psi_2(\frac{\partial H}{\partial t}) \\
&= dt \wedge \Psi_2(\operatorname{rot}_x E) + \Psi_3(\operatorname{div}_x H) + dt \wedge \Psi_2\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) \\
&= dt \wedge \left(\Psi_2\left(\operatorname{rot}_x E + \frac{\partial H}{\partial t}\right)\right) + \Psi_3(\operatorname{div}_x H).
\end{aligned}$$

Da $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $dt \wedge dx_1 \wedge dx_2$, $dt \wedge dx_1 \wedge dx_3$, $dt \wedge dx_2 \wedge dx_3$ linear unabhängig und $\Psi_2, \Psi_3$ Isomorphismen sind, folgt die Behauptung.
**Zu b)** Da $V$ sternförmig ist und $d\Omega = 0$ gilt, finden wir $\alpha \in \Omega^1(V)$ mit $d\alpha = \Omega$. Wir schreiben $\alpha = adt + \Psi_1(A)$ mit $a \in C^\infty(V)$ und $A \in C^\infty(V, \mathbb{R}^3)$. Mit $d_t\Psi_1(A) = -\Psi_1(\frac{\partial A}{\partial t}) \wedge dt$ rechnet man

$$\begin{aligned}
\Psi_1(E) \wedge dt + \Psi_2(H) = \Omega = d\alpha &= (d_x a) \wedge dt + \frac{\partial a}{\partial t}\underbrace{dt \wedge dt}_{=0} + d_x(\Psi_1(A)) - \Psi_1(\frac{\partial A}{\partial t}) \wedge dt \\
&= \Psi_1(\operatorname{grad}_x a) \wedge dt + \Psi_2(\operatorname{rot}_x A) - \Psi_1\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) \wedge dt \\
&= \Psi_1\left(\operatorname{grad}_x a - \frac{\partial A}{\partial t}\right) \wedge dt + \Psi_2(\operatorname{rot}_x A).
\end{aligned}$$

Ähnlich wie oben folgt daraus $E = \operatorname{grad}_x a - \frac{\partial A}{\partial t}$ und $H = \operatorname{rot}_x A$.
**Zu c)** Die Rechnung in b) zeigt, dass $(a_0, A_0)$ genau dann eine Lösung von $(*)$ ist, wenn $\alpha_0 = a_0 dt + \Psi_1(A_0)$ die Gleichung $d\alpha_0 = \Omega$ erfüllt. Sei $(a, A)$ eine weitere Lösung von $(*)$. Wir setzen $\alpha = adt + \Psi_1(A)$. Dann gilt $d(\alpha - \alpha_0) = \Omega - \Omega = 0$, d.h. $\alpha - \alpha_0$ ist geschlossen. Da $V$ sternförmig ist, gibt es $\varphi \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$ mit $d\varphi = \alpha - \alpha_0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
adt + \Psi_1(A) = \alpha = \alpha_0 + d\varphi &= a_0 dt + \Psi_1(A_0) + d_t\varphi + d_x\varphi \\
&= \left(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) dt + \Psi_1(A_0) + \Psi_1(\operatorname{grad}_x \varphi)
\end{aligned}$$

$$= \left(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) dt + \Psi_1(A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi).$$

Also gilt

$$(a, A) = \left(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, A_0 + \operatorname{grad}_x \varphi\right).$$

**Zu d)** Den Hinweis zeigt man durch direkte Rechnung ähnlich wie die Graßmann-Identität des Kreuzprodukts. Es gilt

$$\begin{aligned} i)\, \operatorname{grad}_x a - \frac{\partial A}{\partial t} &= E, \\ ii)\, \operatorname{rot}_x H &= \frac{\partial E}{\partial t}, \\ iii)\, \operatorname{rot}_x A &= H, \\ iv) \frac{\partial a}{\partial t} &= \operatorname{div}_x A. \end{aligned}$$

Ableiten von i) nach $t$ und Einsetzen von ii) und iii) gibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}_x a - \frac{\partial^2 A}{\partial^2 t} = \operatorname{rot}_x H = \operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}_x A).$$

Mit $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}_x a = \operatorname{grad}_x \frac{\partial a}{\partial t} \underset{iv)}{=} \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x A$, und dem Hinweis gilt dann

$$0 = -\frac{\partial^2 A}{\partial^2 t} + \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x A - \operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}_x A) = -\frac{\partial^2 A}{\partial^2 t} + \Delta_x A.$$

**Zu e)** Mit $\Delta_x \varphi = \operatorname{div}_x(\operatorname{grad}_x \varphi)$ rechnet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial a_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} \\ &= \frac{\partial a_0}{\partial t} + \Delta_x \varphi - \frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div}_x A_0 \\ &= \operatorname{div}_x(\operatorname{grad}_x \varphi + A_0) = \operatorname{div}_x A. \end{aligned}$$

Also erfüllt $(a, A)$ die Eichbedingung.