Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 7 – Abgabe: 12. 12. - 15. 12. 2016 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**
Zeigen Sie: Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann orientierbar, wenn auf M ein glattes Einheitsnormalenfeld existiert, d.h. eine glatte Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\nu(x) \in N_xM$ und $\|\nu(x)\| = 1$ für alle $x \in M$.

Tipp: Für eine positiv orientierte Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ *setze* $\nu(x) = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|}$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**
Zeigen Sie, dass folgende Untermannigfaltigkeiten orientierbar sind. Wählen Sie eine Orientierung und berechnen Sie jeweils eine lokale Darstellung der Volumenform.

a) *Bizylinderkurve:* $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \,,\, y^2 + z^2 = 2 \}$.

b) *Rotationsfläche:* $R_f = \{ (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, z) \in \mathbb{R} \times (a, b) \}$, wobei $f \in C^\infty((a, b))$ und $f > 0$.

c) *Wendelfläche:* $W = \{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid (\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 \}$.

d) *Graph einer Funktion* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *:* $G_f = \{ (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**
Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $f \in C^\infty(U)$ eine Funktion und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld.

a) Zeigen Si:
   i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ und
   ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

b) Wir nehmen an, dass U sternförmig ist. Zeigen Sie:
   i) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} F = 0$ existiert ein Potential $h : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} h = F$.
   ii) Zu jedem Vektorfeld $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} F = 0$ existiert ein Vektorfeld $G \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} G = F$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+5 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Es sei $E = E(x,t) : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das elektrische Feld und $H = H(x,t) : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld. Dabei bezeichnen wir die Punkte des $\mathbb{R}^3$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und mit $t \in \mathbb{R}$ die Zeit. Die Operationen der Divergenz und Rotation auf die räumlichen Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3$ der zeitabhängigen Vektorfelder bezeichnen wir mit div_x bzw. rot_x. Im Vakuum lauten die ersten Maxwellschen Gleichungen (bei geeigneter Normierung):

$$\mathrm{rot}_x\, E = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad , \quad \mathrm{div}_x\, H = 0 \ .$$

Wir definieren folgende 2–Form in $\mathbb{R}^4$:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{3} E_j(x,t)\, dx_j \wedge dt + H(x,t) \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^3} \ , \quad \text{wobei} \quad \omega_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Maxwellschen Gleichungen äquivalent zu $d\Omega = 0$ sind.

b) Sei $V \subset U \times \mathbb{R}$ ein sternförmiges Gebiet. Zeigen Sie, dass es ein magnetisches Vektorpotential $A = A(x,t) \in C^\infty(V, \mathbb{R}^3)$ und ein skalares Potential $a = a(x,t) \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\mathrm{rot}_x\, A = H \quad , \quad \mathrm{grad}_x\, a - \frac{\partial A}{\partial t} = E \ . \qquad (*)$$

c) Sei (a_0, A_0) eine Lösung von $(*)$. Zeigen Sie, dass alle andere Lösungen von der Form

$$(a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, A_0 + \mathrm{grad}_x\, \varphi)$$

sind, mit einer Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}$ (Freiheit der Eichung).

d) Nehmen wir an, dass die Eichbedingung $\frac{\partial a}{\partial t} = \mathrm{div}_x\, A$ gilt. Zeigen Sie, dass A der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta_x A = 0$$

genügt. Dabei wirken die Differentialoperatoren komponentenweise.
Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\mathrm{rot}_x\, \mathrm{rot}_x\, A + \Delta_x A = \mathrm{grad}_x\, \mathrm{div}_x\, A$, *und nutzen Sie dabei eine weitere Maxwellsche Gleichung:* $\mathrm{rot}_x\, H = \frac{\partial E}{\partial t}$.

e) Sei (a_0, A_0) eine Lösung der Gleichung $(*)$ und $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_x \varphi = -\frac{\partial a_0}{\partial t} + \mathrm{div}_x\, A_0.$$

Beweisen Sie, daß $(a, A) = (a_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, A_0 + \mathrm{grad}_x\, \varphi)$ die Eichbedingung erfüllt.