Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 8 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung.

a) Zeigen Sie, dass für $F := f \circ P \in C^2(P^{-1}(U), \mathbb{R})$ gilt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}F + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}F + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}F\right)(r,\phi) = \big(\Delta f\big)(P(r,\phi)) \ .$$

b) Zeigen Sie $\Delta(\log\|x\|_2) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, und $\Delta(\operatorname{Re} z^k) = \Delta(\operatorname{Im} z^k) = 0$ für alle $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}f(r\cos\phi, r\sin\phi) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\phi, r\sin\phi)\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin\varphi\\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(r\cos\phi, r\sin\phi) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\phi, r\sin\phi)\cos^2\phi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin\phi\cos\phi\\
&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin^2\phi\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi^2}f(r\cos\phi, r\sin\phi) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[-\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\phi, r\sin\phi)r\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\phi, r\sin\phi)r\cos\phi\right]\\
&= \frac{1}{r^2}\Bigg[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\phi, r\sin\phi)r^2\sin^2\phi - \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\phi, r\sin\phi)r\cos\phi\\
&\quad- 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\phi, r\sin\phi)r^2\sin\phi\cos\phi - \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\phi, r\sin\phi)r\sin\phi\\
&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\phi, r\sin\phi)r^2\cos^2\phi\Bigg]\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin^2\phi - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin\phi\cos\phi\\
&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\phi, r\sin\phi)\cos^2\phi\\
&\quad-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\phi, r\sin\phi)\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin\phi\right]
\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right)(f(r\cos\phi, r\sin\phi)) = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f\right)(r\cos\phi, r\sin\phi)$$

Zu b): $\underline{\Delta(\log \|x\|_2) = 0}$: Mit $f = \log \sqrt{x^2+y^2}$ folgt

$$F(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \log\sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi} \overset{r\geq 0}{=} \log r.$$

Damit folgt nach a)

$$(\Delta f)(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{\partial^2 \log r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \log r}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \log r}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} + 0 + \frac{1}{r}\frac{1}{r} = 0$$

$\underline{\Delta(\operatorname{Re} z^k) = 0}$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \operatorname{Re}(x+iy)^k \\
F(r,\phi) &= \operatorname{Re}(r\cos\phi + i\sin\phi)^k = \operatorname{Re}\left(re^{i\phi}\right)^k = \operatorname{Re}\left(r^k e^{ik\phi}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(r^k\cos(k\phi) + ir^k\sin(k\phi)\right) = r^k\cos(k\phi) \\
(\Delta f)(r\cos\phi, r\sin\phi) &= \frac{\partial^2 r^k\cos(k\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r^k\cos(k\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial r^k\cos(k\phi)}{\partial r} \\
&= k(k-1)r^{k-2}\cos(k\phi) - \frac{1}{r^2}r^k\cos(k\phi)k^2 + \frac{1}{r}kr^{k-1}\cos(k\phi) \\
&= (k^2-k-k^2+k)r^{k-2}\cos(k\phi) = 0
\end{aligned}$$

$\underline{\Delta(\operatorname{Im} z^k) = 0}$: Die Rechnungen sind fast identisch zu denen beim Realteil:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \operatorname{Im}(x+iy)^k \\
F(r,\phi) &= r^k\sin(k\phi) \\
(\Delta f)(r\cos\phi, r\sin\phi) &= \frac{\partial^2 r^k\sin(k\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r^k\sin(k\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial r^k\sin(k\phi)}{\partial r} \\
&= k(k-1)r^{k-2}\sin(k\phi) - \frac{1}{r^2}r^k\sin(k\phi)k^2 + \frac{1}{r}kr^{k-1}\sin(k\phi) = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine glatte Kurve.

a) Zeigen Sie, dass es glatte Funktionen $r, \vartheta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\gamma(t) = (r(t)\cos\vartheta(t), r(t)\sin\vartheta(t))\ .$$

Anleitung:
Sei $r(t) = \|\gamma(t)\|$. Wähle $\vartheta_a \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(a) = (r(a)\cos\vartheta_a, r(a)\sin\vartheta_a)$ und definiere

$$\vartheta(t) = \vartheta_a + \int_a^t \frac{-y(s)x'(s) + x(s)y'(s)}{r(s)^2}\,ds\,.$$

b) Zeigen Sie, dass $\vartheta(b) - \vartheta(a) = \int_\gamma \omega$, wobei ω die Windungsform ist. Die Zahl

$$W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega$$

heißt die *Windungszahl* von γ um 0.

c) Zeigen Sie, dass $W(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$, wenn γ geschlossen ist ($\gamma(a) = \gamma(b)$).

d) Berechnen Sie $W(\gamma, 0)$ für $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t)\big)$.

Lösung:
Zu a): Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Setze wie im Tipp $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ und

$$\vartheta(t) = \vartheta_a + \int_a^t \frac{-y(s)x'(s) + x(s)y'(s)}{r(s)^2} ds = \vartheta_a + \int_a^t \gamma^*(\omega) = \vartheta_a + \int_{\gamma|_{[a,t]}} \omega,$$

wobei ϑ_a ein Argument von

$$\gamma(a) = (r(a) \cos \vartheta_a, r(a) \sin \vartheta_a) = r(a)e^{i\vartheta_a}$$

ist und

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Da $\gamma(t) \neq 0$, $\forall t$, ist $r \in C^\infty([a, b], (0, \infty))$ und $\vartheta \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$. Es bleibt zu zeigen, dass $\gamma(t) = r(t)e^{i\vartheta(t)}$, das heißt $\vartheta(t)$ ist ein Argument von $\gamma(t)$. Sei $t \in [a, b]$ fest. Betrachte eine offene Überdeckung $U_1, \ldots, U_m$[1] von $\gamma([a, t])$ mit sternförmigen Mengen und sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$ so dass $\gamma(a) \in U_1$, $\gamma(t_1) \in U_1 \cap U_2$, ..., $\gamma(t_{m-1}) \in U_{m-1} \cap U_m$, $\gamma(t) \in U_m$. Seien $\arg_1, \ldots, \arg_m$ Zweige des Arguments definiert in $U_1, \ldots, U_m$. Dann gilt $d(\arg_j) = \omega$ und

$$\int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} \omega = \int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} d(\arg_j) = \arg_j(\gamma(t_j)) - \arg_j(\gamma(t_{j-1})).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma|_{[a,t]}} \omega &= \int_{\gamma|_{[t_0,t_1]}} \omega + \ldots + \int_{\gamma|_{[t_{m-1},t_m]}} \omega \\
&= -\arg_1 \gamma(a) + \underbrace{[\arg_1 \gamma(t_1) - \arg_2 \gamma(t_1)]}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \underbrace{[\arg_{m-1} \gamma(t_{m-1}) - \arg_m \gamma(t_{m-1})]}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \arg_m \gamma(t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \arg_1 \gamma(a) + \int_{\gamma|_{[a,t]}} \omega \in \arg_m \gamma(t) + 2\pi\mathbb{Z} = \mathrm{Arg}\gamma(t)$$

[1] Wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ kann diese immer endlich gewählt werden.

Zu b):

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \gamma^*\omega \overset{a)}{=} \vartheta(b) - \vartheta(a)$$

Zu c): $\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow r(a) = r(b)$ und $e^{i\vartheta(a)} = e^{i\vartheta(b)}$, das heißt $\vartheta(b) - \vartheta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Es folgt

$$W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(b) - \vartheta(a) \in \mathbb{Z}.$$

Zu d):

$$\begin{aligned}
W(\gamma,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \gamma^*\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{-\gamma_2(t)\gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)}{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{-\sin(2n\pi t)[-\sin(2n\pi t)2n\pi] + \cos(2n\pi t)\cos(2n\pi t)2n\pi}{\cos^2(2n\pi t) + \sin^2(2n\pi t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{\sin^2(2n\pi t) + \cos^2(2n\pi t)}{1} 2\pi n dt = \frac{1}{2\pi} 2n\pi \int_0^1 dt = n
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ bezeichne die abgeschlossenen Mengen der $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ die kompakten Mengen des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{Q}_n$ die Menge der Quader im $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n)$.

Lösung:

Vorbemerkung: Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

$\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n))}$: „$\subset$“: Sei $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\mathbb{R}^n \backslash U \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ und $U = \mathbb{R}^n\backslash(\mathbb{R}^n\backslash U) \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n))$.
„$\supset$“: $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathbb{R}^n\backslash F \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow F = \mathbb{R}^n\backslash(\mathbb{R}^n\backslash F) \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$.

$\underline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))}$: Die Inklusion „$\supset$“ ist klar, da in $\mathbb{R}^n$ jede kompakte Menge abgeschlossen ist.
„$\subset$“: $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow F_n := F \cap \overline{B_n(0)}$ ist kompakt und $F = \bigcup_n F_n \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$ $\Rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$.

$\underline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n)}$: „$\subset$“: Sei $\mathcal{Q}_n'$ das System von halboffenen Quadern der Form $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. Sei $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass U eine abzählbare Vereinigung von halboffenen Quadern aus $\mathcal{Q}_n'$ ist. $\Rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n') \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n) \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n') \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n)$.
„$\supset$“: Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist eine abzählbarer Durchschnitt von offenen Intervallen, also ist jeder Quader in $\mathbb{R}^n$ ein abzählbarer Durchschnitt von offenen Quadern. $\Rightarrow \mathcal{Q}_n \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und

$$\mathcal{A}^\mu := \{\, E \subset X \mid \exists A \in \mathcal{A}, \exists N \subset N_0 \in \mathcal{A} \ \text{ mit } \ \mu(N_0) = 0, \text{ so daß } \ E = A \cup N \,\} \qquad (*)$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\overline{\mu} : \mathcal{A}^\mu \to [0, \infty]$, $\overline{\mu}(E) := \mu(A)$, mit $E = A \cup N$ wie in $(*)$ ist wohldefiniert.

b) $E \in \mathcal{A}^\mu \iff \exists\, E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ mit $E_1 \subset E \subset E_2$ und $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$.

Lösung:

Zu a): Sei $E = A \cup N = A' \cup N'$ mit $A, A' \in \mathcal{A}$, $N \subset N_0 \in \mathcal{A}_0$, $N' \subset N_0' \in \mathcal{A}_0$, wobei $\mathcal{A}_0$ das Mengensystem der μ-Nullmengen bezeichne. Dann folgt

$$A \cup (N_0 \cup N_0') = A \cup N \cup (N_0 \cup N_0') = E \cup N_0 \cup N_0' = A' \cup N' \cup N_0 \cup N_0' = A' \cup (N_0 \cup N_0')$$

und somit

$$\mu(A) \le \mu(A \cup N_0 \cup N_0') = \mu(A' \cup N_0 \cup N_0') \le \mu(A') + \mu(N_0) + \mu(N_0') = \mu(A')$$

und umgekehrt, also $\mu(A) = \mu(A')$.

Zu b): „$\Rightarrow$“: Sei $E = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$, $N \subset N_0 \in \mathcal{A}_0$. Dann setzen wir

$$E_1 := A \subset A \cup N = E \subset A \cup N_0 =: E_2.$$

Offensichtlich ist $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ und $\mu(E_2 \backslash E_1) = \mu(N_0 \backslash A) \le \mu(N_0) = 0$.

„$\Leftarrow$“: Seien $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ mit $E_1 \subset E \subset E_2$ und $\mu(E_2 \backslash E_1) = 0$. Dann ist

$$E = E_1 \cup \underbrace{[(E_2 \backslash E_1) \cap E]}_{=:N}.$$

$E_1 \in \mathcal{A}$ und $N \subset E_2 \backslash E_1 \in \mathcal{A}_0$, das heißt $E \in \mathcal{A}^\mu$.