Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 9 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung, $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra auf X und $\mathcal{B}$ eine σ–Algebra auf Y. Zeigen Sie:

a) $f_* \mathcal{A} = \{ B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$ ist eine σ–Algebra auf Y .

b) $f^{-1} \mathcal{B} = \{ f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$ ist eine σ–Algebra auf X .

Lösung:

Wir beweisen ganz straight-forward die Eigenschaften aus der Definition von σ-Algebren. Dabei nutzen wir die Verträglichkeit des Urbildes mit Mengenoperationen. Beachte, dass $f_*\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$

Zu a):

1. $Y \in f_*\mathcal{A}$, da $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$
2. $B \in f_*\mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow Y \setminus B \in f_*\mathcal{A}$
3. $B_i \in f_*\mathcal{A},\ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$
$$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in f_*\mathcal{A}$$

Zu b):

1. $Y \in \mathcal{B} \Rightarrow X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}\mathcal{B}$
2. $A \in f^{-1}\mathcal{B} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : A = f^{-1}(B)$. Also gilt
$$X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}\mathcal{B}$$
3. $A_i \in f^{-1}\mathcal{B},\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists B_i \in \mathcal{B} : A_i = f^{-1}(B_i)$. Dann folgt
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i}_{\in \mathcal{B}} \Big) \in f^{-1}\mathcal{B}$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Beweisen Sie:

a) Seien X, Y Mengen, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt: $\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue–messbar und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $A + x = \{\, a + x \mid a \in A \,\}$ Lebesgue–messbar und $\lambda_n(A) = \lambda_n(A + x)$.
(D.h. das Lebesgue–Maß ist translationsinvariant.)

Lösung:

Zu a): $f^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra nach 1b). Es gilt

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_\sigma f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}).$$

Für die umgekehrte Inklusion betrachte die σ-Algebra

$$\mathcal{C} := \left\{ C \subset Y \;\middle|\; f^{-1}(C) \in \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\mathcal{E}\right) \right\} = f_*\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\mathcal{E}\right).$$

Es ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, woraus $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}$ und somit auch

$$f^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \subset f^{-1}\mathcal{C} = f^{-1}f_*\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\mathcal{E}\right) \subset \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\mathcal{E}\right),$$

da allgemein gilt $f^{-1}f_*\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$:

$$A \in f^{-1}f_*\mathcal{A}, \text{ d.h. } A = f^{-1}(B) \text{ für ein } B \in f_*\mathcal{A} \overset{\text{Def. von} f_*\mathcal{A}}{\Longrightarrow} A = f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Zu b): Für $x \neq 0$ bezeichen $t_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t_x(v) = v + x$ die *Translation um* x.

1. Schritt: Ist $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ ein Quader, so ist $t_x(Q) = (x_1 + I_1) \times \cdots \times (x_n + I_n)$ auch ein Quader mit $\lambda_n(t_x(Q)) = \lambda_n(Q)$. Sei $R \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine Figur. Dann ist $R = \bigsqcup_i Q_i$ eine disjunkte Vereinigung von Quadern. Also ist

$$t_x(R) = t_x\left(\bigsqcup_i Q_i\right) = \bigsqcup_i t_x\left(Q_i\right)$$

und

$$\lambda_n\left(t_x(R)\right) = \sum_i \lambda_n\left(t_x(Q_i)\right) = \sum_i \lambda_n(Q_i) = \lambda_n(R).$$

Folglich ist $t_x(\mathcal{R}_n) \subset \mathcal{R}_n$ und der elementargeometrische σ-Inhalt λ_n der Figuren ist translationsinvariant.

2. Schritt: Es ist $t_x t_{-x} = \mathrm{Id}$, also

$$\mathcal{R}_n = t_x\left(t_{-x}\mathcal{R}_n\right) \subset t_x\left(\mathcal{R}_n\right) \subset \mathcal{R}_n \quad \Rightarrow \quad t_x(\mathcal{R}_n) = \mathcal{R}_n.$$

Nach a) folgt

$$\mathcal{A}_\sigma\left(t_x^{-1}\mathcal{R}_n\right) = t_x^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_n = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n) = t_x\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n) = t_x(\mathcal{B}_n)$$

3. Schritt: Setze $\beta := \lambda_n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ und $\beta_x(B) = \beta(B+x)$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Aus der Bijektivität von t_x und den Eigenschaften von β folgt, dass β_x ebenfalls ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{B}(R^n)$ definiert. Aber $\beta|_{\mathbb{R}^n} = \beta_x|_{\mathbb{R}^n}$ nach Schritt 1. Nach dem Fortsetzungssatz 13.2.8 folgt, dass $\beta = \beta_x$.
Fazit: $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow B + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(B + x) = \lambda_n(B)$.

4. Schritt: Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, existieren $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $N \subset N_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n(N_0) = 0$ und $A = B \cup N$. Also gilt $t_x(A) = t_x(B) \cup t_x(N)$. Aus Schritt 3 folgt $t_x(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_n(t_x(B)) = \lambda_n(B)$ und $t_x(N_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_n(t_x(N_0)) = \lambda_n(N_0) = 0$. Weil $t_x(N) \subset t_x(N_0)$, ist $t_x(N)$ eine Teilmenge einer Borelschen Nullmenge. Also ist $t_x(A)$ Lebsgue-messbar und $\lambda_n(A+x) = \lambda_n(B+x) = \lambda_n(B) = \lambda_n(A)$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**
Zeigen Sie, dass jede p–dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ ($p < n$) eine Nullmenge ist.

Lösung:
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $p < n$. M ist lokal bügelbar, das heißt $\forall x \in M\ \exists\ U_x \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von x, $\exists \Phi_x : U_x \to V_x$ Diffeomorphismus mit $\phi_x(x) = 0$ und $\phi_x(U_x \cap M) = V_x \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. $(U_x)_{x\in M}$ ist eine offene Überdeckung von M.

Lemma 1 Sei X ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis, $A \subset X$. Jede offene Überdeckung von A enthält eine abzählbare Überdeckung.

Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene abzählbare Teilüberdeckung von $(U_x)_{x\in M}$. Wir zeigen, dass $U_i \cap M$ eine Nullmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Damit folgt, dass auch $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(U_i \cap M)$ eine Nullmenge ist.

Lemma 2 Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : V \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $N \subset V$ eine Nullmenge. Dann ist $h(N)$ eine Nullmenge.

Da $\mathbb{R}^p \times \{0\} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}[-k, k]^p \times \{0\}$ eine abzählbare Vereinigung von entarteten Quadern ist, ist sie eine Nullmenge. Hier ist $p < n$ wesentlich. Aus Lemma 2 folgt, $U_i \cap M = \phi_i^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ ist eine Nullmenge.

Beweis von Lemma 1: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von A. Sei

$$\mathcal{B}' := \left\{B \in \mathcal{B} \;\middle|\; \exists U \in \mathcal{U},\ B \subset U\right\}.$$

$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ und somit ist auch $\mathcal{B}'$ abzählbar. Wähle für jedes $B \in \mathcal{B}$ ein $U_B \in \mathcal{U}$ mit $B \subset U_B$. Sei $\mathcal{U}' = \{U_B \mid B \in \mathcal{B}'\}$. Dann ist $\mathcal{U}'$ abzählbar und eine Teilüberdeckung von A:

Sei $x \in A \Rightarrow \exists\, U_0 \in \mathcal{U}, x \in U_0$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, ist U_0 eine Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$, dass heißt $\exists B \in \mathcal{B}$, $x \in B \subset U_0$. Also $B \in \mathcal{B}'$ und $\exists U_B \in \mathcal{U}'$ mit $x \in B \subset U_B$. $\square$

Beweis von Lemma 2:
1. Schritt: Behauptung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $r > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Folge $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von halboffenen Würfeln mit Kantenlänge $\leq r$ und $U = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} W_k$. Die Behauptung folgt wie im Beweis von Satz 13.1.5.

2. Schritt: Sei $h \in C^1(V, \mathbb{R}^m)$, wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $N \subset V$ eine Nullmenge. Sei $r > 0$ gegeben und (W_k) eine Ausschöpfung von V wie oben. Dann ist $N \cap W_k$ eine Nullmenge. Sei $\overline{W}_k = W_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - p_i| \leq r\}$. Wir zeigen, dass $h(N \cap \overline{W}_k)$ eine Nullmenge ist. Sei weiter $R > r$ so gewählt, dass auch $W_R(p) \subset V$. Setze $M = \sup\{\|dh(x)\| \mid x \in W_R(p)\}$. Weil $h \in C^1$ und $W_R(p)$ kompakt ist, ist $M < \infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Es gibt eine Folge von Würfeln $\widetilde{W}_i = W_{r_i}(p_i)$ der Kantenlänge $< R - r$ mit

$$N \cap \overline{W}_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{W}_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n\left(\widetilde{W}_i\right) < \varepsilon$$

(nach Definition der Nullmenge können wir zunächst offene Quader Q_k wählen mit

$$N \cap \overline{W}_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n\left(Q_k\right) < \varepsilon$$

und dann Schritt 1 auf jedes Q_k anwenden). Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $(N \cap \overline{W}_k) \cap \widetilde{W}_i \neq \varnothing$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann liegen alle $\widetilde{W}_i$ in $W_R(p)$ und nach dem Schrankensatz gilt

$$h\left(W_i\right) = h\left(W_{r_i}(p_i)\right) \subset W_{Mr_i}\left(h(p_i)\right)$$

$$\Rightarrow \quad h\left(N \cap \overline{W}_k\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{Mr_i}\left(h(p_i)\right) \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\left(W_{Mr_i}\left(h(p_i)\right)\right) = M^n \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\left(\widetilde{W}_i\right) \leq M^n \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad N \cap \overline{W}_k$ ist Nullmenge.

Aus $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(N \cap \overline{W}_k\right)$ folgt $h(N) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} h\left(N \cap \overline{W}_k\right)$ ist Nullmenge.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Eine monoton wachsende, linksseitig stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Verteilungsfunktion, falls $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Sei λ_F das durch F definierte Lebesgue-Stieltjes–Maß. Beweisen Sie:

a) Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x))$ eine Verteilungsfunktion, und es gilt $\lambda_{F_\mu}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mu$.

b) Umgekehrt ist für jede Verteilungsfunktion F das Maß $\mu = \lambda_F|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $F_\mu = F$.

Lösung:

Zu a): Die Monotonie und die Linksstetigkeit von F_μ folgt aus der Monotonie bzw. Stetigkeit von unten für μ. Da μ nach Voraussetzung ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, folgt sofort

$$\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mu\left((-\infty, n)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n)\right) = \mu(\mathbb{R}) = 1.$$

Genauso zeigt man,

$$\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0.$$

Also ist F_μ eine Verteilungsfunktion.

Nach der Definition des Lebesgue-Stieltjes-Maßes stimmen $\lambda_{F_\mu}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ und μ auf der Algebra der Figuren $\mathcal{R}_1$ überein, denn

$$\lambda_{F_\mu}\left([a, b)\right) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \mu\left((-\infty, b)\right) - \mu\left((-\infty, a)\right) = \mu\left([a, b)\right).$$

Da μ offensichtlich σ-endlich ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz, dass $\lambda_{F_\mu}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mu$.

Zu b): Nach dem Lebesgue-Stieltjes Konstruktion ist $\mu = \lambda_F|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da mit der Stetigkeit von unten für μ folgt

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left([-n, n)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(F(n) - F(-n)\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Weiterhin:

$$F_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mu\left([-n, x)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(F(x) - F(-n)\right) = F(x).$$