Analysis III – Winter 2016/17
Prof. Dr. George Marinescu/Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 9 – Abgabe: 9. 1. - 12. 1. 2017 in den Übungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**
Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung, $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra auf X und $\mathcal{B}$ eine σ–Algebra auf Y. Zeigen Sie:

a) $f_* \mathcal{A} = \{ B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$ ist eine σ–Algebra auf Y .

b) $f^{-1} \mathcal{B} = \{ f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$ ist eine σ–Algebra auf X .

Aufgabe 2 **4 Punkte**
Beweisen Sie:

a) Seien X, Y Mengen, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt: $\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue–messbar und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $A + x = \{ a + x \mid a \in A \}$ Lebesgue–messbar und $\lambda_n(A) = \lambda_n(A + x)$.
(D.h. das Lebesgue–Maß ist translationsinvariant.)

Aufgabe 3 **4 Punkte**
Zeigen Sie, dass jede p–dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ $(p < n)$ eine Nullmenge ist.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**
Eine monoton wachsende, linksseitig stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Verteilungsfunktion, falls $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0\,,\ \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1\,.$ Sei λ_F das durch F definierte Lebesgue-Stieltjes–Maß. Beweisen Sie:

a) Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x))$ eine Verteilungsfunktion, und es gilt $\lambda_{F_\mu}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mu$.

b) Umgekehrt ist für jede Verteilungsfunktion F das Maß $\mu = \lambda_F|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $F_\mu = F$.