Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 1 – Abgabe in der Woche: 18.-22. 4. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Betrachten Sie die Polynome

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad && n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0 \\ g(x) &= b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0, \qquad && m \in \mathbb{N}, b_m \neq 0 \neq b_0 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die möglichen Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Aufgabe 2 **8 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n, dass es Polynome p_n gibt, so dass

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Sie müssen nicht die Koeffizienten in Abhängigkeit von f bestimmen, sondern nur die Existenz der p_n mit den gewünschten Eigenschaften zeigen.

b) Stellen sie das n-te Taylorpolynom um den Punkt 0 auf. Gegen welche Funktion konvergieren diese Polynome?

c) Interpretieren Sie das Ergebnis.

Zusatzaufgabe 3 **+4 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Integrale, z.B. mit der Methode der Partialbruchzerlegung:

$$\text{a)} \qquad \int \frac{3x^3 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{21}{2}}{x^3 - 3x + 2} dx$$

$$\text{b)} \qquad \int \frac{3x^4 - 13x^3 + 26x^2 - 26x + 13}{(x^2 - 2x + 2)^3} dx$$