Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu
Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 10 – Abgabe in der Woche: 4. - 6.7. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der *Laplace-Operator* $\Delta : C^2(U, \mathbb{R}) \to C^0(U, \mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\Delta f := \partial_{11} f + \ldots + \partial_{nn} f.$$

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung. Zeigen Sie, dass mit $F := f \circ P \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} F + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} F \right) (r, \varphi) = (\Delta f) \left(P(r, \varphi) \right).$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^k \in \mathbb{C}$ sowie die zugehörige Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die sich daraus nach der üblichen Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ ergibt. f ist ein $\mathbb{R}^2$–wertiges Polynom, und somit ist insbesondere $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

(a) Sei P die Polarkoordinatenabbildung und $F := f \circ P$. Berechnen Sie $F(r, \phi)$.

(b) Zeigen Sie $\Delta f_i = 0$ für $i = 1, 2$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 und Vorsicht: P ist nicht surjektiv.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x^y \in \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen $\partial_{j_1 j_2 j_3} f(x, y)$ dritter Ordnung. Stellen Sie dann das Taylorpolynom dritten Grades zu f mit Entwicklungspunkt $(1, 1)$ auf.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Abbildung $F = (F_1, \ldots, F_n) : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld. Für ein differenzierbares Vektorfeld F heißt die Funktion

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Divergenz des Vektorfeldes F.

a) Sei $u : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div}(uF) = \langle \operatorname{grad} u, F \rangle + u \operatorname{div} F \ .$$

b) Berechnen Sie

$$\operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

c) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f \qquad \text{und} \\ \Delta(fg) &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle. \end{aligned}$$

d) Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\Delta h(\|x\|_2) = h''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2} h'(\|x\|_2) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$