Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu
Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 11 – Abgabe in der Woche: 11. - 13.7. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**
Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b) $g(x,y) = \cos x \cdot \cosh y$

Aufgabe 2 **4 Punkte**
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2 - xy + 4y^2 \in \mathbb{R}$ und das Innere $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$ einer Ellipse.

a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf E.

b) Parametrisieren Sie den Rand von E durch eine Kurve c und bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f|_{\partial E}$ durch Betrachtung derer von $f \circ c$.

c) Wo nimmt f auf der abgeschlossenen Ellipse $\overline{E}$ sein Minimum und Maximum an? Hat $f|_{\overline{E}}$ noch andere lokale Extrema als diese?

Aufgabe 3 **4 Punkte**
Bestimmen Sie die Maxima und Minima von

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2) \in \mathbb{R}$$

auf dem Vollellipsoid

$$X := \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8\right\}.$$

Tipp: Diskutieren Sie Inneres und Rand getrennt und benutzen Sie für den Rand die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**
Gegeben sei eine stetige Funktion $h : [a,b] \times [0,T] \to \mathbb{R}$. Definieren Sie die Funktionen

$$g(s,t) := \int_0^t h(s,\tau) \quad \text{und} \quad d\tau, \quad f(s,t) := \int_a^s g(\sigma,t)\, d\sigma = \int_a^s \left(\int_0^T h(\sigma,\tau) d\tau \right) d\sigma$$

a) Zeigen Sie, daß h gleichmäßig stetig ist.

b) Es ist offensichtlich, daß $t \mapsto g(s,t)$ stetig differenzierbar ist (wieso?). Begründen Sie die Stetigkeit von $s \mapsto g(s,t)$.

Bitte wenden!

c) Begründen Sie, daß $t \mapsto f(b,t)$ die Ableitung $\frac{d}{dt} f(b,t) = \int_a^b h(\sigma,t)\, d\sigma$ hat, also stetig differenzierbar ist. Folgern Sie

$$\int_a^b \left(\int_0^T h(\sigma,\tau) d\tau \right) d\sigma = f(b,T) = \int_0^T \left(\int_a^b h(\sigma,t)\, d\sigma \right) dt.$$

Wir können also die Reihenfolge der Integration vertauschen.

Wiederholungsaufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe W1

Beweisen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius 1 hat, und für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \ .$$

Aufgabe W2

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt *gleichmäßig stetig* genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad d_X(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie: Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

Aufgabe W3

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offenen zusammenhängenden Mengen. Zeigen Sie, dass $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe W4

Bestimme Sie jeweils die Ableitung der folgenden Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, wobei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) $h : U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x > 0, y \neq 0 \right\} \to \mathbb{R}^2$

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi z}{y}\right) - 2x + 2 \\ z^2 + y^2 + \sqrt{x} - \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$