Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu
Dr. Frank Lapp / M.Sc. Hendrik Herrmann
Serie 11 – Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b) $g(x,y) = \cos x \cdot \cosh y$

Lösung:

Zu a): Wir berechnen die Jacobi-Matrix und setzen sie gleich dem Nullvektor, um die kritischen Punkte zu berechnen:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y & 3y^2 - 3x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overset{I}{\Rightarrow} y = x^2 \overset{II}{\Rightarrow} x = y^2 = x^4$$
$$\Rightarrow (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}.$$

Die kritischen Punkte sind somit $(0,0)$ und $(1,1)$. Berechne Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix},$$

setze die kritischen Punkte ein und berechnen das charakteristische Polynom $\chi_{H_f(0,0)}$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \chi_{H_f(0,0)} = \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 \overset{!}{=} 0.$$

Die Eigenwerte von $H_f(0,0)$ sind ± 3 und $H_f(0,0)$ ist somit indefinit. Der Punkt $(0,0)$ ist somit kein lokales Extremum.

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \chi_{H_f(1,1)} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 3 \\ 3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2 - 9$$
$$= \lambda^2 - 12\lambda + 27 \overset{!}{=} 0$$

Die Eigenwerte von $H_f(1,1)$ sind somit 3 und 6, das heißt $H_f(1,1)$ ist positiv definit und deshalb ist $(1,1)$ ein strenges lokales Minimum mit $f(1,1) = -1$. Weitere Extremstellen gibt es nicht.

Zu b): Berechne die Jacobi-Matrix und setze sie gleich 0:

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cosh y & \cos x \sinh y \end{pmatrix} \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\sin x \underbrace{\cosh y}_{>0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(\pi k)\sinh(y) = (-1)^k \sinh(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sinh y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Die kritischen Punkte sind somit $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Die Hessematrix ist:

$$\begin{aligned} H_g(x,y) &= \begin{pmatrix} -\cos x\cosh y & -\sin x \sinh y \\ -\sin x \sinh y & \cos x \cosh y \end{pmatrix} \\ H_g(\pi k, 0) &= \begin{pmatrix} -(-1)^k \cot 1 & -0\cdot 0 \\ -0 \cdot 0 & (-1)^k \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \\ \chi_{H_f(\pi k,0)} &= \begin{vmatrix} \lambda + (-1)^k & 0 \\ 0 & \lambda - (-1)^k \end{vmatrix} = (\lambda + (-1)^k)(\lambda - (-1)^k). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $H_f(\pi k, 0)$ sind ± 1 und haben entgegengesetztes Vorzeichen. Damit ist $H_f(\pi k, 0)$ in allen kritischen Punkten indefinit und es liegt dort somit kein lokales Extremum vor.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2 - xy + 4y^2 \in \mathbb{R}$ und das Innere $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$ einer Ellipse.

a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf E.

b) Parametrisieren Sie den Rand von E durch eine Kurve c und bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f|_{\partial E}$ durch Betrachtung derer von $f \circ c$.

c) Wo nimmt f auf der abgeschlossenen Ellipse $\overline{E}$ sein Minimum und Maximum an? Hat $f|_{\overline{E}}$ noch andere lokale Extrema als diese?

Lösung:

Zu a): Da E eine offene Menge ist, können wir die lokalen Extrema nach dem bekannten Schema suchen:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x + 8y \end{pmatrix} \overset{!}{=} (0,0) \qquad \Rightarrow y = 2x \Rightarrow 0 = -x + 8y = -x + 16x = 15x.$$

Die Funktion f hat also nur den kritischen Punkt $(0,0)$ und der wird mit der Hesse-Matrix untersucht

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = H_f(0,0) \qquad \Rightarrow \chi_{H_f(0,0)} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-8) - 1$$
$$= \lambda^2 - 10\lambda + 15$$
$$= \left(\lambda - (5 + \sqrt{10})\right)\left(\lambda - (5 - \sqrt{10})\right).$$

Die Eigenwerte $5 \pm \sqrt{10}$ von $H_f(0,0)$ sind beide positiv, $H_f(0,0)$ ist somit positiv definit und $(0,0)$ mit $f(0,0) = 0$ ein strenges lokales Minimum.

Zu b): Die Randellipse wird parametrisiert durch $c : [0, 2\pi) \ni \varphi \mapsto (\cos\varphi, \frac{1}{2}\sin\varphi) \in \partial E$, wie man durch Einsetzen sofort sieht. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f \circ c(\varphi) &= \cos^2\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi = 1 - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \\
(f \circ c)'(\varphi) &= -\frac{1}{4}\cos(2\varphi)\cdot 2 = -\frac{1}{2}\cos(2\varphi) \overset{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{1+2k}{4}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Die kritischen Stellen in $[0, 2\pi)$ sind somit $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ und $\frac{7}{4}\pi$. Wir berechnen die zweite Ableitung

$$(f \circ c)''(\varphi) = \sin(2\varphi)$$

und setzen die kritischen Stellen ein:

$$\begin{aligned}
&(f \circ c)''\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum von } f \circ c \\
&\qquad \text{mit } (f \circ c)\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1 - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ und } c\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \\
&(f \circ c)''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum von } f \circ c \\
&\qquad \text{mit } (f \circ c)\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ und } c\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \\
&(f \circ c)''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum von } f \circ c \\
&\qquad \text{mit } (f \circ c)\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1 - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ und } c\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \\
&(f \circ c)''\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{7}{2}\pi\right) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum von } f \circ c \\
&\qquad \text{mit } (f \circ c)\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 1 - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ und } c\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

Zu c): Da der Funktionswert in den Randminima $\frac{3}{4}$ beträgt und somit größer als $f(0,0) = 0$ ist, ist in $(0,0)$ das globale Minimum. Weiterhin sind $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ globale Maxima. Die beiden Randminima sind keine lokalen Minima, da

$$f\left(t\cos\varphi, \frac{t}{2}\sin\varphi\right) = t^2 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)}_{>0}$$

für festes φ eine nach oben geöffnete Parabel ist und somit gibt es in jeder offenen Umgebung eines Randpunkts Punkte mit kleinerem Funktionswert. Somit könnten dort höchstens lokale Maxima auftreten.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Bestimmen Sie die Maxima und Minima von

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2) \in \mathbb{R}$$

auf dem Vollellipsoid

$$X := \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8\right\}.$$

Tipp: Diskutieren Sie Inneres und Rand getrennt und benutzen Sie für den Rand die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Lösung:

Inneres:

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - 4x & x - 4y & -4z^3 + 4z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, y = 0, z \in \{0, \pm 1\}$$

Die kritischen Punkte im Inneren sind somit $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ und $(0, 0, -1)$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -12z^2 + 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{H_f(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda + 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 12z^2 - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 12z^2 - 4) \underbrace{\left((\lambda + 4)^2 - 1\right)}_{=\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda+3)(\lambda+5)}$$

Die Eigenwerte sind somit -3, -5 und $4 - 12z^2$. Für $z = \pm 1$ ist auch der letzte Eigenwert $-8 < 0$, die Matrix $H_f(0, 0, \pm 1)$ negativ definit und somit liegen bei $(0, 0, \pm 1)$ strenge Maxima mit $f(0, 0, \pm 1) = 1$. Für $z = 0$ ist der letzte Eigenwert $4 > 0$, $H_f(0, 0, 0)$ indefinit und $(0, 0, 0)$ keine lokale Extremstelle.

Äußeres: Wie im Tipp empfohlen verwenden wir die Methode der Langrange Multiplikatoren, um die Randextrema zu untersuchen. Mit $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 8$ ist die Lagrange Funktion L gegeben durch

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) \\ &= xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2) + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 8) \end{aligned}$$

Wir suchen die kritischen Punkte von L:

$$\operatorname{grad} L(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} y - 4x + \lambda 2x \\ x - 4y + \lambda 2y \\ -4z^3 + 4z + \lambda 4z \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + (\lambda - 2)2x \\ x + (\lambda - 2)2y \\ 4z(z^2 - \lambda - 1) \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht linear, weswegen sich eine Vielzahl von Extremstellen ergibt:

$$\begin{array}{ll} y + 2x(\lambda-2) = 0 & \mid \cdot y \\ x + 2y(\lambda-2) = 0 & \mid \cdot x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y^2 + 2xy(\lambda-2) = 0 \\ x^2 + 2xy(\lambda-2) = 0 \end{array} \quad \overset{I-II}{\Rightarrow} \quad y^2 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow y = \pm x \tag{2}$$

Einsetzen in die erste Zeile von (1) ergibt:

$$0 = y + 2x(\lambda-2) = \pm x + 2x(\lambda-2) = x(2\lambda - 4 \pm 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee \lambda \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

Die vierte Zeile von (1) und Gleichung (2) implizieren $z^2 = 4 - x^2$ und somit für den Fall $x = y = 0$, dass $z = \pm 2$ gilt. Damit erhalten wir die kritischen Punkte $(0, 0, \pm 2)$. Für $x \neq 0$ betrachten wir die 3. Zeile:

$$z = 0 \vee \left(z^2 = \lambda + 1 \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\} \quad \Leftrightarrow z \in \left\{\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}\right) \tag{3}$$

Einsetzen in $x^2 = 4 - z^2$ ergibt für $z = 0$, dass $x = \pm 2$ gilt, und somit erhält man die kritischen Punkte $(\pm 2, \pm 2, 0)$ und $(\pm 2, \mp 2, 0)$. Für $z \neq 0$ ergibt sich:

$$x = \pm\sqrt{4 - \frac{5}{2}} = \pm\sqrt{\frac{8}{2} - \frac{5}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ bzw. } x = \pm\sqrt{4 - \frac{7}{2}} = \pm\sqrt{\frac{8}{2} - \frac{7}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

Zusammengefasst ist die 22-elementige Menge der kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} K = \Bigg\{ & (0,0,\pm 2), (\pm 2, \pm 2, 0), (\pm 2, \mp 2, 0), \\ & \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right), \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right), \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right), \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right), \\ & \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Die Werte $f(x,y,z) = xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2)$ in den kritischen Randpunkten sind (die Vorzeichen von z spielen keine Rolle, da es nur in gerader Potenz vorkommt):

$$\begin{aligned} f(\pm 2, \pm 2, 0) &= 4 - 2(4+4) = 4 - 16 = -12, \\ f(\pm 2, \mp 2, 0) &= -4 - 2(4+4) = -4 - 16 = -20, \\ f(0,0,\pm 2) &= -16 - 2(-4) = -8, \\ f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, (\pm)\sqrt{\frac{5}{2}}\right) &= \frac{3}{2} - \frac{25}{4} - 2\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = -\frac{19}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{23}{4} = -5,75, \\ f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2}}, (\pm)\sqrt{\frac{5}{2}}\right) &= -\frac{3}{2} - \frac{25}{4} - 2\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = -\frac{31}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{35}{4} = -8,75, \end{aligned}$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},(\pm)\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{49}{4}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)=-\frac{47}{4}+\frac{20}{4}=-\frac{27}{4}=-6,75,$$
$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},(\pm)\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{49}{4}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)=-\frac{51}{4}+\frac{20}{4}=-\frac{31}{4}=-7,75.$$

Insgesamt hat f auf X zwei globale Maxima bei $(0,0,\pm1)$ mit $f(0,0,\pm1)=1$ und zwei globale Minima bei $(\pm2,\mp2,0)$ mit $f(\pm2,\mp2,0)=-20$.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Gegeben sei eine stetige Funktion $h:[a,b]\times[0,T]\to\mathbb{R}$. Definieren Sie die Funktionen

$$g(s,t):=\int_0^t h(s,\tau)d\tau \quad \text{und} \quad , \quad f(s,t):=\int_a^s g(\sigma,t)\,d\sigma=\int_a^s\left(\int_0^t h(\sigma,\tau)d\tau\right)d\sigma$$

a) Zeigen Sie, daß h gleichmäßig stetig ist.

b) Es ist offensichtlich, daß $t\mapsto g(s,t)$ stetig differenzierbar ist (wieso?). Begründen Sie die Stetigkeit von $s\mapsto g(s,t)$.

c) Begründen Sie, daß $t\mapsto f(b,t)$ die Ableitung $\frac{d}{dt}f(b,t)=\int_a^b h(\sigma,t)\,d\sigma$ hat, also stetig differenzierbar ist. Folgern Sie

$$\int_a^b\left(\int_0^T h(\sigma,\tau)d\tau\right)d\sigma=f(b,T)=\int_0^T\left(\int_a^b h(\sigma,t)\,d\sigma\right)dt.$$

Wir können also die Reihenfolge der Integration vertauschen.

Lösung:

Zu a): Wir beweisen die etwas allgemeinere Aussage:

Ist $f:\mathbb{R}^n\supset K\to\mathbb{R}$ stetig und K kompakt, so ist f sogar gleichmäßig stetig.

Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon_0>0$, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ ein Paar $x_n,x_n'\in K$ existiert mit

$$\left\|x_n-x_n'\right\|<\frac{1}{n} \text{ und } \left|f(x_n)-f(x_n')\right|\geq\varepsilon_0.$$

Da K kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, das heißt es existiert ein $\xi\in K$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$. Wegen $\|x_n-x_n'\|<\frac{1}{n}$ konvergiert auch $(x_{n_k}')_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ξ und die Stetigkeit von f impliziert

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'),$$

was im Widerspruch zu $|f(x_n)-f(x_n')|\geq\varepsilon_0\ \forall n\in\mathbb{N}$ steht.

Zu b): $t \to g(s,t)$ ist stetig differenzierbar:
Für $t \in [0,T]$ sei k betragsmäßig so klein, dass $t+k \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|k|}|g(s,t+k)-g(s,t)-h(s,t)k| &= \frac{1}{|k|}\left|\int_0^{t+k} h(s,\tau)d\tau - \int_0^t h(s,\tau)d\tau - h(s,t)k\right| \\
&= \frac{1}{|k|}\left|\int_t^{t+k} h(s,\tau)d\tau - h(s,t)\int_t^{t+k} d\tau\right| \leq \frac{1}{|k|}\left|\int_t^{t+k} (h(s,\tau)-h(s,t))\,d\tau\right| \\
&\leq \sup_{\tau\in[t,t+k]} |h(s,\tau)-h(s,t)| \stackrel{k\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

da h stetig ist. Also ist $t \mapsto g(s,t)$ differenzierbar mit der stetigen Ableitung $t \mapsto h(s,t)$ und somit stetig differenzierbar.

$s \mapsto g(s,t)$ ist stetig: Seien $s_1, s_2 \in [a,b]$ beliebig:

$$|g(s_1,t)-g(s_2,t)| = \int_0^t |h(s_1,\tau)-h(s_2,\tau)|\,d\tau \leq \sup_{\tau\in[0,T]} |h(s_1,\tau)-h(s_2,\tau)|\,t \stackrel{s_1\to s_2}{\longrightarrow} 0,$$

da h nach a) gleichmäßig stetig ist. Also ist $s \mapsto g(s,t)$ stetig.

Zu c): $t \mapsto f(b,t)$ hat die Ableitung $\frac{d}{dt}f(b,t) = \int_a^b h(\sigma,t)\,d\sigma$:
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von h kann k so klein gewählt werden, dass

$$|h(\sigma,\tau)-h(\sigma,t)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall (\sigma,\tau),(\sigma,t) \in [a,b]\times[0,T] \text{ mit } \|(\sigma,\tau)-(\sigma,t)\| \leq k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|k|}\left|f(b,t+k)-f(b,t)-\int_a^b h(\sigma,t)d\sigma k\right| \\
&\quad= \frac{1}{|k|}\left|\int_a^b \left(\int_0^{t+k} h(\sigma,\tau)d\tau\right)d\sigma - \int_a^b\left(\int_0^t h(\sigma,\tau)d\tau\right)d\sigma - \int_a^b h(\sigma,t)d\tau k\right|d\sigma \\
&\quad\leq \frac{1}{|k|}\int_a^b \left|\int_t^{t+k} (h(\sigma,\tau)-h(\sigma,t))\,d\tau\right|d\sigma \leq \frac{1}{|k|}\frac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{\int_a^b d\sigma}_{=b-a}\underbrace{\left|\int_t^{t+k} d\tau\right|}_{=|k|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Differenzierbarkeit von $t \mapsto f(b,t)$ gezeigt.

Die Vertauschung der Integrale folgt nun mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b \left(\int_0^T h(\sigma,\tau)d\tau\right)d\sigma \stackrel{Def.}{=} f(b,T) = \int_0^T \left(\frac{d}{dt}f(b,t)\right)dt = \int_0^T\left(\int_a^b h(\sigma,t)\,d\sigma\right)dt.$$

Wiederholungsaufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe W1
Beweisen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius 1 hat, und für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \ .$$

Lösung:
Für die Lösung der Aufgabe benötigen wir folgende zwei Fakten über Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$:

1. Konvergiert die Folge $(|a_n|/|a_{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gegeben durch

$$R = \lim_{n\to\infty} |a_n|/|a_{n+1}|$$

(siehe Quotientenkriterium).

2. Besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ einen Konvergenzradius $R > 0$, so ist die für $|x| < R$ definierte Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ \text{für } |x| < R$$

wobei der Konvergenzradius der Potenzreihe auf der rechten Seite der Gleichung ebenfalls R beträgt.

Zur Aufgabe: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n+k}{n}}{\binom{n+k+1}{n+1}} &= \frac{(n+k)!(n+1)!k!}{n!k!(n+k+1)!} \\ &= \frac{(n+k)!}{(n+k+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{n+1}{n+k+1} = \frac{1}{1+\frac{k}{n+1}} \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+k}{n}}{\binom{n+k+1}{n+1}} = 1.$$

Dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe nach (1.) gegeben durch $R = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte man nun die Funktion $f_k : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n.$$

Wegen (2.) ist die Funktion f_k stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{df_k}{dx}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{n+k}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{n+k+1}{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (k+1) \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!} x^n = (k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{n} x^n \\
&= (k+1) f_{k+1}(x),
\end{aligned}$$

für $|x| < 1$. Wir zeigen nun durch Induktion, dass $f_k(x) = (1-x)^{-(k+1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Im Fall $k = 0$ erhält man die geometrische Reihe und somit

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^{0+1}}.$$

Angenommen es gilt $f_k(x) = (1-x)^{-(k+1)}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe obiger Rechnung folgt dann

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} \frac{df_k}{dx}(x) = (-1) \frac{-(k+1)}{k+1} (1-x)^{-(k+1)-1} = \frac{1}{(1-x)^{(k+1)+1}}.$$

Aufgabe W2

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt *gleichmäßig stetig* genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad d_X(x,y) < \delta \; \Rightarrow \; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie: Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

Lösung:

Für die Lösung der Aufgabe benötigen wir folgende Fakten über die Topologie eines metrischen Raumes (X, d_X):

1. Kompaktheit (d.h. Überdeckungskompaktheit) und Folgenkompaktheit sind äquivalente Begriffe.

2. Die Abbildung $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ ist stetig bzw. folgenstetig.

3. Zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergieren genau dann wenn die Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $X \times X$ konvergiert und es gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n).$$

Zur Aufgabe: (Beweis durch Widerspruch) Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists\ \epsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \wedge d_Y(f(x), f(y)) \geq \epsilon. \text{ (*)}$$

Wähle $\epsilon > 0$, sodass die Bedingungen in (*) erfüllt werden können. Dann findet man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte $x_n, y_n \in X$ mit $d_X(x_n, y_n) < 1/n$ und $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Da X kompakt ist, finden wir nach (1.) zunächst eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und anschließend eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Da Teilfolgen konvergenter Folgen wiederum konvergieren, erhalten wir also zwei konvergente Folgen $(x_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $\tilde{x}_k = x_{n_{j_k}}$, $\tilde{y}_k = y_{n_{j_k}}$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie

$$x := \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k, \text{ und } y := \lim_{k\to\infty} \tilde{y}_k.$$

Wegen $0 \leq d_X(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) < 1/n_{j_k}$, $n_{j_k} \to \infty$ für $k \to \infty$, (2.) und (3.) gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} d_X(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = d_X(\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k, \lim_{k\to\infty} \tilde{y}_k) \\ &= d_X(x, y). \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften metrischer Räume folgt somit $x = y$. Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = f(x), \text{ und } \lim_{k\to\infty} f(\tilde{y}_k) = f(y).$$

Außerdem gilt nach Konstruktion $d_Y(f(\tilde{x}_k), f(\tilde{y}_k)) \geq \epsilon > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit (2.) und (3.) erhält man schließlich

$$0 < \lim_{k\to\infty} d_Y(f(\tilde{x}_k), f(\tilde{y}_k)) = d_Y(f(x), f(y)) = d_Y(f(x), f(x)) = 0,$$

also einen Widerspruch.

Aufgabe W3
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offenen zusammenhängenden Mengen. Zeigen Sie, dass $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ zusammenhängend ist.

Lösung:
Für die Lösung der Aufgabe benötigen wir folgende Fakten aus der Topologie:

1. Eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend wenn sie wegzusammenhängend ist. .

2. Es seien X, Y und Z topologische Räume. Eine Abbildung $f : Z \to X \times Y$ ist genau dann stetig wenn $\pi_1 \circ f$ und $\pi_2 \circ f$ stetig sind, wobei $\pi_1 : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ (bzw. $\pi_2 : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$) die Projektion auf X (bzw. Y) bezeichnet.

Zur Aufgabe: Die Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^k$ sind offen und zusammenhängend und nach (1.) somit wegzusammenhängend. Da $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^k$ offen sind und die Topologien von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^{n+k}$ übereinstimmen, ist die Menge $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen. Nach (1.) reicht es dann zu zeigen, dass $U \times V$ wegzusammenhängend ist. Es seien also $(u_0, v_0), (u_1, v_1) \in U \times V$ zwei Punkte. Die Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend. Deshalb gibt es einen Weg von u_0 nach u_1, d.h. eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \to U$ mit $f(0) = u_0$ und $f(1) = u_1$. Mit dem gleichen Argument findet man eine stetige Abbildung $g : [0, 1] \to V$ mit $g(0) = v_0$ und $g(1) = v_1$. Man definiere eine Abbildung $h : [0, 1] \to U \times V$, $h(t) = (f(t), g(t))$. Wegen $\pi_1 \circ h = f$ und $\pi_2 \circ h = g$ ist h stetig nach (2.). Außerdem gilt $h(0) = (u_0, v_0)$ und $h(1) = (u_1, v_1)$. Also ist h ein Weg von (u_0, v_0) nach (u_1, v_1).

Aufgabe W4
Bestimme Sie jeweils die Ableitung der folgenden Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, wobei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $\langle\cdot\, ,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) $h : U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi z}{y}\right) - 2x + 2 \\ z^2 + y^2 + \sqrt{x} - \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) Die Abbildung f ist ein Polynom in den Variablen $(x_1, \dots, x_n)$ und somit überall differenzierbar. Behauptung: Das Differential von f am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $df_x(v) = \langle Ax, v\rangle + \langle Av, x\rangle$.
Es gilt

$$f(x+v) - f(x) = \langle A(x+v), x+v\rangle - \langle Ax, x\rangle = \langle Ax, v\rangle + \langle Av, x\rangle + \langle Av, v\rangle.$$

Außerdem existiert eine Konstante $C > 0$ mit $|\langle Av, v\rangle| \leq C\|v\|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Wir erhalten

$$0 \leq \frac{|f(x+v) - f(x) - \langle Ax, v\rangle - \langle Av, x\rangle|}{\|v\|} = \frac{|\langle Av, v\rangle|}{\|v\|} \leq C\|v\|$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nach dem Prinzip der dominierten Konvergenz gilt somit

$$\lim_{v\to 0} \frac{|f(x+v) - f(x) - \langle Ax, v\rangle - \langle Av, x\rangle|}{\|v\|} = 0.$$

Also ist $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $df_x(v) = \langle Ax, v\rangle + \langle Av, x\rangle$ das Differential von f im Punkt x.

b) Die Abbildung h ist auf $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y \neq 0\}$ differenzierbar als Verkettung und Produkt differenzierbarer Abbildungen. Es sei h_1 (bzw. h_2) die erste (bzw. zweite) Komponente von h. Es gilt

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z) = -2\ , \qquad \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{\pi z}{y^2}\cos\left(\frac{\pi z}{y}\right)\ , \ \frac{\partial h_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\pi}{y}\cos\left(\frac{\pi z}{y}\right),$$
$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ , \ \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y\ , \qquad \frac{\partial h_2}{\partial z}(x,y,z) = 2z.$$

Dann ist die Jacobimatrix von h im Punkt $(x, y, z) \in U$ gegeben durch

$$J_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{\pi z}{y^2}\cos\left(\frac{\pi z}{y}\right) & \frac{\pi}{y}\cos\left(\frac{\pi z}{y}\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$