Analysis II – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 2 – Abgabe in der Woche: 25.-29. 4. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

Zeigen Sie, dass $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

b) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

a) f_n konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$.

b) f_n konvergiert *nicht* gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

c) f_n konvergiert gleichmäßig auf $D_a = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \geq a\}$ für jedes $a > 0$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomfunktionen, die gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion f konvergiert. Zeigen Sie, dass der Grenzwert f auch eine Polynomialfunktion ist.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Berechnen Sie den Konvergenzradius R und die Summe für $|x| < R$ der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n\geq 0} n^2 x^n$

b) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$

Konvergieren diese Reihen für $|x| = R$? Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Die Funktionen $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien stetig. Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere für jede $x \in [a, b]$ monoton gegen ein $f(x)$. Zeigen Sie, dass

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

gleichmäßig auf $[a, b]$.