Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 3 – Abgabe in der Woche: 2.-4. 5. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X. Zeigen Sie, dass dann auch

$$d(x,y) := \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

eine Metrik auf X ist. Zeigen Sie, dass für „min" statt „max" die Aussage nicht immer gilt, indem Sie Gegenbeispiele auf $X = \mathbb{R}^2$ finden.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

a) Für alle $x,y,z \in X$ gilt $|d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z)$.

b) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in (X,d), so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y) = d(x,y)$ für alle $y \in X$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum. Zeigen Sie, dass für alle $x,y \in V$ die Polarisierungs-Beziehungen

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \quad \text{falls } V \text{ reell},$$
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right), \quad \text{falls } V \text{ komplex},$$

und die Parallelogramm-Formel

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,.$$

gelten.
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die Norm $\|\cdot\|$ ist genau dann durch ein Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogramm-Formel gilt. Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{R}^n$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $a < b$ und $V := C^0([a,b],\mathbb{C})$. Sei außerdem $p \geq 1$.
Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

eine Norm auf V gegeben ist.
Tipp zur Dreiecksungleichung: Drücken Sie $\|f+g\|_p^p$ als Limes Riemannscher Summen mit lauter gleichlangen Teilintervallen aus und benutzen Sie die Minkowski-Ungleichung auf $\mathbb{C}^n$.