Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 4 – Abgabe in der Woche: 9.-11. 5. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei $C^1([0,1])$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Für $f \in C^1([0,1])$ seien

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt,$$
$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{und}$$
$$|||f||| = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ eine Norm ist.

b) Zeigen Sie, dass eine bzgl. $\|\cdot\|$ konvergente Folge auch bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergiert und dass eine bzgl. $|||\cdot|||$ konvergente Folge auch bzgl. $\|\cdot\|$ konvergiert.

c) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen $f_n(t) = t^n$, $g_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$ bzgl. der drei Normen. Sind diese Normen äquivalent?

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei d eine beliebige Metrik auf $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann auch

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

eine Metrik ist. Eine Metrik d auf einem Vektorraum V heißt *translationsinvariant*, wenn

$$d(x+a, y+a) = d(x,y), \quad \forall x,y \in V \text{ und } a \in V.$$

Prüfen Sie nach, ob $\tilde{d}(x,y)$ translationsinvariant ist, falls d diese Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Zeigen Sie

a) Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, wenn für $i = 1,\dots,n$ die Koeffizientenfolgen $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind, wobei $x_k = \begin{pmatrix} x_k^1 & \cdots & x_k^n \end{pmatrix}^t$.

b) Für a,b,c,d,e,f ist der Quader $[a,b]\times[c,d]\times[e,f] \subset \mathbb{R}^3$ als metrischer Raum mit der induzierten Euklidischen Metrik vollständig.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei X eine Menge und $(Y, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Der *Raum der beschränkten Funktionen von X nach Y* ist definiert als

$$B(X, Y) = \{f : X \to Y \mid \exists C_f > 0 : \|f(x)\| \leq C_f \forall x \in X\}, \quad \|f\|_B := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Zeigen Sie, dass auch $(B(X, Y), \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum ist.