Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 5 – Abgabe in der Woche: 30.5. - 1.6. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bestimme man das Innere, den Rand und die abgeschlossene Hülle. Welche der Mengen sind offen bzw. abgeschlossen?

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$

b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \times (0, n)$

c) $\left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$

d) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{1}{n}, n\right)\right)$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei X ein topologischer Raum und $M \subset X$. Es seien $\mathring{M}$ (Menge der inneren Punkte von M), $\overline{M}$ (Menge der Berührpunkte) und ∂M (Menge der Randpunkte) definiert wie in der Vorlesung. Zeigen Sie:

a) $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$.

b) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $N \subset Y$, so gilt bzgl. der Produkttopologie auf $X \times Y$:
   i) $(M \times N)^{\circ} = \mathring{M} \times \mathring{N}$
   ii) $\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}$
   iii) $\partial(M \times N) = \left(\partial M \times \overline{N}\right) \cup \left(\overline{M} \times \partial N\right)$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Finden Sie die Stetigkeitsstellen folgender Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $C^0[a,b]$ der Raum der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen reellwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{[a,b]}$, in der $C^0[a,b]$ vollständig ist. Sei

$$k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und $A : C^0[a,b] \to C^0[a,b]$ gegeben durch

$$(Af)(s) := \int_a^b k(s,t)f(t)dt.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$\|Af\|_{[a,b]} \leq \underbrace{\left\| \int_a^b |k(\cdot,t)|dt \right\|_{[a,b]}}_{=:\|A\|} \|f\|_{[a,b]}, \quad \forall f \in C^0[a,b].$$

Bestimmen Sie ein f, das die Gleichheit erfüllt. (Das bedeutet A ist ein stetiger Operator mit Operatornorm $\|A\|$.)

b) Für $\|A\| < 1$ hat die Gleichung $f - Af = g$ für jedes $g \in C^0[a,b]$ genau eine Lösung. Stellen Sie diese mit Hilfe der geometrischen Reihe für $(\mathrm{id} - A)^{-1}$ dar.

Die zu lösende Gleichung in b) heißt Fredholm-Gleichung nach Erik Ivar Fredholm (1866-1927). Die geometrische Reihe wird in diesem Fall auch Neumannsche Reihe genannt nach Carl Gottlieb Neumann (1832-1925).