Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 6 – Abgabe in der Woche: 6. - 8.6. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ einen Grenzwert im Häufungspunkt $(0,0)$ von X besitzen:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$

b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}\,(e^x - 1)$

c) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Seien X, Y topologische Räume. Zeigen Sie:

a) Ist X kompakt, $y \in Y$ und W eine offene Menge in $X \times Y$ mit $X \times \{y\} \subset W$, so gibt es eine offene Umgebung $V \subset Y$ mit $y \in V$ und $X \times V \subset W$.

b) Sind X und Y kompakt, so ist auch $X \times Y$ kompakt.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Zeigen Sie:

a) Jede abgeschlossene Teilmenge A eines kompakten Raumes X ist kompakt.

b) Ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge nicht-leeren kompakter Teilmengen eines topologischen Hausdorffraumes X, das heißt

$$X \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \ldots,$$

so gilt für den Durchschnitt $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$:

i) $K \neq \varnothing$.

ii) K ist kompakt.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $U \subsetneq V$ ein abgeschlossener Unterraum.

a) Für $v \in V$ wird der *Abstand von v zu U* definiert durch

$$d(v, U) = \inf \{ \|u - v\| \mid u \in U \} .$$

Zeigen Sie, dass $d(v, U) > 0$, falls $v \notin U$.

b) Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert ein $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $d(v, U) \geq 1 - \delta$.

c) Sei $W \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum, d.h. $\dim W < \infty$. Zeigen Sie, dass W unter diesen Annahmen abgeschlossen ist.

d) (***Satz von Riesz***) Die Einheitskugel $B = \{ v \in V \mid \|v\| \leqslant 1\}$ ist genau dann kompakt, wenn $\dim V < \infty$.
Hinweis: Um zu zeigen, dass die Einheitskugel in $\mathbb{R}^\infty$ nicht kompakt ist, genügt es eine Folge darin anzugeben, die keine konvergente Teilfolge hat.