Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 7 – Abgabe in der Woche: 13. - 15.6. (in den Übungen)

Aufgabe 1 (Abstand zwischen zwei Mengen) **8 Punkte**

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Sei $A \subset X$. Zeigen Sie, dass $X \ni x \mapsto d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a) \in \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

b) Seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Sei

$$f : X \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}\,.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$.

c) Zeigen Sie, dass zwei offene Mengen $U, V \subset X$ existieren, mit $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$.

d) Für $A, B \subset X$ definiere $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

   i) Sei $K \subset X$ kompakt, $F \subset X$ abgeschlossen, $K \cap F = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es $x_0 \in K$ gibt mit $d(x_0, F) = d(K, F)$ und $d(K, F) > 0$.

   ii) Seien $K, L \subset X$ kompakte Teilmengen. Zeigen Sie, dass es $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ gibt mit $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$.

e) Sei $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$.

   i) Sei $F \subset X$ abgeschlossen und unbeschränkt und $f : F \to \mathbb{R}$ stetig mit

   $$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$$

   (f heißt Ausschöpfungsfunktion). Zeigen Sie, dass $x \in F$ existiert mit

   $$f(x) = \inf_{y \in F} f(y).$$

   ii) Sei $K \subset X$ kompakt, $F \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $x \in K, y \in F$ existieren mit $d(K, F) = d(x, y)$. Bleibt die Aussage wahr, wenn X ein normierter Vektorraum von unendlicher Dimension ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

a) X ist zusammenhängend genau dann, wenn jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ konstant ist (wobei $\{0,1\}$ mit der induzierten Topologie von $(\{0,1\}, d_2)$ versehen ist).

b) Sei $A \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge. Falls $A \subset B \subset \overline{A}$, dann ist B zusammenhängend.

c) Sei $(C_i)_{i\in I}$ eine höchstens abzählbare Familie zusammenhängender Teilmengen von X (hier $I = \{1,\ldots,n\}$ oder $I = \mathbb{N}$), so dass für alle $i \in I \setminus \{1\}$, $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$. Dann ist

$$\bigcup_{i\in I} C_i$$

zusammenhängend.

d) Seien $X_1,\ldots,X_n$ topologische Räume. $X_1 \times \ldots \times X_n$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $X_1,\ldots,X_n$ zusammenhängend ist.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Wir betrachten eine spezielle Menge $X \subset \mathbb{R}$ die sich iterativ durch das herausstreichen von Teilmengen konstruieren lässt:

Nehmen Sie zuerst aus dem Intervall $[0,1]$ das mittlere Intervall $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ heraus. Dann bleibt $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ über. Nehmen Sie aus den übrig bleibenden Intervallen wieder die mittleren Teilintervalle heraus, so bleibt

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Das Herausstreichen der mittleren Intervalle aus den übrig gebliebenen Intervallen wird unendlich oft fortgesetzt. Zeigen Sie, dass die resultierende Menge X einige (vielleicht überraschende) Eigenschaften hat:

1. X ist abgeschlossen.
2. X ist kompakt.
3. X hat keine isolierten Punkte.
4. X ist überabzählbar. (Hinweis: Sie können dazu die sogenannte *triadische Entwicklung* nutzen (wie die Dezimalentwicklung, aber nicht zur Basis 10, sondern zur Basis 3)).

Es lässt sich weiterhin zeigen, dass die X die „Länge“ 0 hat. Dazu konstruiert man Überdeckungen von X aus abgeschlossenen Mengen deren Gesamtlänge beliebig klein gewählt werden kann.