Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 8 – Abgabe in der Woche: 20. - 22.6. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\tilde{p} : (0, 2\pi) \ni \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Homöomorphismus von $(0, 2\pi)$ nach $S^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $p : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ gegeben durch

$$p(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist $A = (a_1 \cdots a_n)$ mit den Spaltenvektoren a_1 bis a_n. Wie möglicherweise aus der linearen Algebra bekannt, sind die *Kofaktoren von* A gegeben durch

$$A_{ji} = \det(a_1, ..., a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, ..., a_n)$$

($e_1, \ldots, e_n$ bezeichnet die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$) und die *Adjunktenmatrix* durch $A^\sharp = (A_{ji})_{1\le i,j\le n}$. Die Spur einer Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente: $\mathrm{Tr}(B_{ij}) = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{ii}$.

Sei $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Determinantenabbildung und $H = (h_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$d(\det)(A) \cdot H = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} A_{ij} = \mathrm{Tr}(A^\sharp \cdot H).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Es existieren alle Richtungsableitungen $\partial_v f(0,0)$ zu f in $(0,0)$.
Tipp: Unterscheiden Sie für $v \in \mathbb{R}^2$ *die Fälle* $v_1 = v_2 = 0$ *bzw.* $v_1 = 0 \wedge v_2 \neq 0$ *bzw.* $v_1 \neq 0$.

b) In $(0,0)$ ist f nicht stetig.
Tipp: Betrachten Sie $f \circ c$ *mit* $c : \mathbb{R} \ni t \to (t^2, t) \in \mathbb{R}^2$.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

Seien V, W normierte Vektorräume. Sei $\mathcal{L}(V,W)$ der Raum der linearen stetigen Funktionen von V nach W.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{L}(V,W) \ni T \mapsto \|T\| = \sup_{v \in V, \|v\|=1} \|T(v)\|$$

eine Norm auf $\mathcal{L}(V,W)$ ist. Sie wird *Operatornorm* genannt.

b) Sei U ein weiterer normierter Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,W)$ und $S \in \mathcal{L}(W,U)$. Zeigen Sie: $S \circ T \in \mathcal{L}(V,U)$ und es gilt $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.

c) Zeigen Sie: Ist W ein Banachraum, dann ist $\mathcal{L}(V,W)$ versehen mit der Operatornorm auch ein Banachraum.