Analysis II – Sommer 2016
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 9 – Abgabe in der Woche: 27. - 29.6. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \ni (x,y,z) \mapsto \left(xy + y^z, \frac{z}{x}\right)$$

und werten Sie sie in den Punkten $(1,2,0), (1,1,-1)$ und $\left(e, \frac{1}{e}, 2\right)$ aus.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J und die Funktionaldeterminante $\det J$ der Funktionen

$$p(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad k(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $r : U \ni x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}(r^{2-n})(x)$ und $\operatorname{grad}(\log r)(x)$.

b) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und *homogen vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, das heißt

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall t > 0,\ \forall x \in U$$

Zeigen Sie:

i) $df(tx) = t^{\alpha-1} df(x)$ für alle $t > 0$, $x \in U$.

ii) $df(x) \cdot x = \langle \operatorname{grad} f(x), x\rangle = \alpha f(x)$ für alle $x \in U$. (*Eulersche Identität*)

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist, aber die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$ nicht stetig sind.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass alle partiellen Ableitungen von g in $(0,0)$ existieren, aber g in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Zusatzaufgabe **+4 Punkte**

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $A, B : I \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ zwei stetig differenzierbare matrixwertige Kurven. Sei $C(t) = A(t)B(t)$. Zeigen Sie:

$$\dot{C}(t) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t),$$

wobei der Punkt die komponentenweise Differenziation nach t bezeichnet.

b) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und sei

$$\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

die aus der linearen Algebra bekannte Inversionsabbildung. Zeigen Sie, inv ist differenzierbar und

$$d\,\mathrm{inv}(A)[H] = -A^{-1}HA^{-1}$$

für alle $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $H \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Tipp: Betrachten Sie $C(t) := (A+tH)^{-1}(A+tH)$.